J. QUINET

curso elemental de matemáticas superiores

tomo
4

continuación
del cálculo
integral
y aplicaciones

LIBRERIA DANTE
Avda. Salamanca, 11 - Alicante
Tel. 965924210

Esta obra ha sido impresa en unos momentos en que las fabricaciones y suministros de papel son difíciles e irregulares.

Rogamos a nuestros lectores disculpen cualquier anormalidad observada en el gramaje y tonalidad del papel utilizado en este libro.

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

TOMO IV

Continuación del Cálculo Integral y Aplicaciones

Curso Elemental de

Prólogo de

R. BARTHÉLEMY

Miembro de la Academia de Ciencias

J. QUINET

Ingeniero de la Escuela Superior de Electricidad
Profesor de la Escuela Nacional de Radioelectricidad de Clichy
Profesor honorario de Matemáticas generales de la Escuela Central de T.S.H.

Matemáticas Superiores

Cálculo diferencial e integral y Geometría analítica plana
con un gran número de ejemplos y aplicaciones

TOMO IV

Continuación del Cálculo Integral
y Aplicaciones

SEGUNDA EDICION

1975

PARANINFO

MADRID

Traducido por
FELIX VIDONDO MORRAS

© 1965 DUNOD

Reservados los derechos de edición,
reproducción o adaptación

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

ISBN: 84-283-0093-3

PARANINFO Magallanes, 25 – Madrid - 15.

Grefol - Avda. Pedro Díez, 16, Madrid-19. Depósito legal: M. 10.698-1975

PROLOGO

J. QUINET es un profesor que aprecio desde hace treinta años. Le hubiera sido muy fácil el obtener para su obra de Matemáticas Superiores, las frases elogiosas de un hombre del arte matemático, y en Francia existen hombres muy notables. Sin embargo, se ha contentado con un «usuario», con un hombre de los que no crean ni juzgan las matemáticas, pero que intentan servirse de ellas.

No estoy pues, especialmente calificado para presentar la obra de un especialista, y si he aceptado a intervenir, es porque J. QUINET, Profesor de Matemáticas, comenzó siendo un Ingeniero Electricista y continuó siéndolo.

Esto explica la forma atractiva que ha sabido dar a exposiciones consideradas frecuentemente como áridas.

Sin abandonar la línea ni el rigor de la enseñanza clásica, que proporciona las alegrías más puras a aquellos —los hay— que aman las matemáticas, muestra, al mismo tiempo que expone el programa, y no al final, para qué sirven las fórmulas del álgebra en la resolución de los problemas de física.

El estudiante, el futuro ingeniero, se da cuenta entonces, de la necesidad de esta «herramienta» intelectual, sin la cual, a pesar de sus dotes de intuición o de invención, no lograría franquear ciertos límites rápidamente alcanzados mediante ella.

Comprende QUINET, que este prodigioso esfuerzo del pensamiento, realizado desde hace algunos siglos, no es la obra de un aficionado, útil solamente para amueblar el espíritu y pasar los exámenes, sino que es una de las bases fundamentales de su profesión.

La obra de J. QUINET, prevista para un curso de una Escuela de Radioelectricidad, está evidentemente orientada hacia los campos de aplicación eléctrica, y yo siento ahora, al leerla, el no haberla tenido antaño, cuando en provincias, preparaba solo el examen de la Escuela Superior de Electricidad, cuando extraía los conceptos matemáticos de un enorme tratado de «Especiales», en el cual era completamente incapaz de hacer las selecciones necesarias.

J. QUINET no olvida sin embargo la mecánica matemática y construye sólidos cimientos para los que tienen mayores aspiraciones. Los estudios de las series, el desarrollo de FOURIER, conducen, en efecto, a las proximidades del cálculo simbólico y no queda mucho camino a recorrer entre las soluciones presentadas para las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de BESSEL.

Intencionadamente hago alusión a aquellas partes que entran ahora en la técnica del ingeniero de circuitos y de ondas centimétricas. Pero no se puede abarcar en un libro encuadrado dentro de las matemáticas elementales toda la estructura de los cálculos de la física moderna. J. QUINET nos conduce a los umbrales de estos campos. Nos da los medios para resolver la mayor parte de los problemas planteados al ingeniero y nos proporciona excelentes trampolines de partida.

Deseo que escriba nuevas obras en las que nos invite a incursiones hacia nuevos horizontes. Todos sus alumnos y amigos le seguirán con interés.

René BARTHÉLEMY.
Miembro de la Academia de Ciencias.

«En el campo de la ciencia, el azar sólo favorece a los espíritus preparados.»

PASTEUR.

PREFACIO

En este Tomo IV, se estudia la segunda parte del Cálculo Integral, y, como en los tomos anteriores, damos un gran número de ejemplos, con todos los detalles de los cálculos, con objeto de que el lector pueda seguirlos fácilmente.

Se incluye también un gran número de aplicaciones de las integrales a la Mecánica, Termodinámica, Electricidad, Resistencia de Materiales y Radio (24 problemas).

DANJON, ilustre director del Observatorio de París, dice en una de sus obras: «Ya que los físicos se sirven de las Matemáticas, ¿por qué las matemáticas no han de servirse de los fenómenos físicos o mecánicos, para ilustrar y aplicar sus teorías y sus cálculos?»

— En el capítulo de la serie de FOURIER damos, *completamente y en detalle,* los cálculos del desarrollo de varias series, con objeto de enseñar al lector a desarrollar una función en serie de FOURIER y hacerle comprender todas las consecuencias que se producen en las aplicaciones.

Estudiamos la integración gráfica, las diferenciales totales y las integrales dobles, desde el punto de vista de su aplicación al cálculo de superficies, volúmenes y momentos de inercia.

— Confiamos en llegar a demostrar, una vez más, la utilidad inmensa de las matemáticas en la ciencia y en la técnica moderna, y esperamos interesar al lector, mostrándole sus posibilidades prácticas. Si el lector puede seguirnos sin dificultad hasta el final, quedaremos recompensados de nuestros esfuerzos.

— Agradezco vivamente al Sr. CHAUSSIN, profesor de la Escuela Normal de Enseñanza Técnica, el haber leído este volumen y aconsejado algunas modificaciones, y a los Sres. GIROUX y DIEUDE, ingenieros, y al Sr. QUINQUETON, director adjunto del Instituto Técnico Profesional, que se han tomado el trabajo ingrato de corregir las pruebas y verificar los cálculos; a todos les expreso mi gratitud.

J. Q.

Nota a la segunda edición

En la segunda edición, revisada y corregida, damos al final, la lista recapitulativa de todas las fórmulas del Tomo IV, una lista de 290 ejercicios y problemas a resolver, para que el lector pueda ejercitarse provechosamente en la aplicación de las teorías del curso, ejecutando un trabajo personal muy útil, e incluso indispensable.

Nota a la tercera edición

En esta tercera edición, revisada y corregida, hemos adoptado el sistema de unidades SI, para todos los ejemplos matemáticos, ya que este sistema se emplea en la enseñanza secundaria, técnica y superior.

J. Q.

Nota a la versión española

— Me considero también obligado a reconocer el esfuerzo de la Editorial PARANINFO, por el cuidado con que esta obra ha sido editada en su versión española, por la claridad y la perfección en la impresión y en las figuras, cosas esenciales en una obra de esta naturaleza.

J. Q.

INDICE DE MATERIAS

CALCULO INTEGRAL
COMPLEMENTOS Y APLICACIONES

CAPÍTULO PRIMERO

Cálculo de momentos de inercia

1. Definición del momento de inercia ... ... *Pág.* 15
2. Teoremas fundamentales 17
3. Ejemplos de momentos de inercia de líneas 19
4. Momentos de inercia de superficies 21
5. Momentos de inercia de volúmenes 23

CAPÍTULO II

Algunas aplicaciones de las integrales

6. Cálculo del potencial eléctrico en un punto de un campo electrostático 25
7. Cálculo del potencial en el interior de una esfera electrizada 26
8. Cálculo de la capacidad eléctrica de un condensador plano 29
9. Demostración matemática de la ley de Ohm 31
10. Aplicación electromagnética 32
11. Cálculo del campo electromagnético en el centro de un solenoide ... 34
12. Desaparición de la corriente eléctrica en una bobina 36
13. Cálculo de la energía potencial contenida en un campo magnético ... 39
14. **Calcular** el potencial a la distancia a de un disco electrizado 40
15. Calcular la potencia suministrada por la corriente alterna 42
16. Cálculo de la potencia eléctrica perdida por corrientes de FOUCAULT en las láminas de hierro 43
17. Encontrar la ley de desplazamiento de una barra de metal que se desliza sobre dos raíles en un campo, para que la corriente inducida sea constante 45
18. Calcular el tiempo que tarda un depósito en vaciarse 47
19. Cálculo de la intensidad de un campo magnético producido a distancia por una antena de radio 48
20. Cálculo de la altura efectiva de una antena de radio 49

21. Cálculo del trabajo mecánico realizado durante un movimiento de rotación ... 52
22. Calcular el trabajo necesario para alargar un resorte ... 53
23. Calcular el trabajo necesario para comprimir un gas perfecto ... 53
24. Calcular el perfil de un sólido de igual resistencia a la tracción (y a la compresión) ... 55
25. Calcular la disminución de longitud de una barra vertical bajo la acción de su peso ... 56
26. Planteamiento del teorema fundamental de la mecánica, para los cuerpos que giran ... 57
27. Aplicación numérica ... 61
28. Problema sobre un disco de FARADAY ... 63
29. Cálculo del empuje hidráulico sobre una superficie ... 64

CAPÍTULO III

Desarrollos en serie de Fourier

30. Teorema de FOURIER ... 67
31. Cálculo del término constante A_0 ... 69
32. Cálculo del coeficiente A_n de la serie de los senos ... 69
33. Cálculo del coeficiente B_n de la serie de los cosenos ... 71
34. Simplificaciones ... 72

Ejemplos de desarrollos

35. Primer ejemplo: Curva en dientes de sierra rectangulares ... 75
36. Segundo ejemplo: Curva en dientes de sierra triangulares ... 76
37. Terecer ejemplo: Curva de una corriente alterna rectificada en una alternancia ... 78
38. Cuarto ejemplo: Curva de una corriente alterna rectificada en dos alternancias ... 81
39. Algunas consecuencias del Teorema de FOURIER ... 81
40. Algunas fórmulas de los desarrollos en serie de FOURIER ... 83

CAPÍTULO IV

Integración gráfica y cálculo aproximado de una integral

41. Procedimiento gráfico para calcular una integral simple (fórmula de SIMPSON) ... 87
42. Cinco ejemplos ... 90

CAPÍTULO V

Integrales curvilíneas
Integración de las diferenciales totales

43. Integrales curvilíneas ... 95
44. Teorema ... 97
45. Aplicación ... 99

46. Ejemplos de cálculo de integrales curvilíneas 100
47. Integración de una diferencial total de una función de dos variables 103
48. Ejemplos 104
49. Diferenciación bajo el signo integral 108
50. Teoría general de la integración de las diferenciales totales 110
51. Método de integración de CAUCHY 112

CAPÍTULO VI

Integrales múltiples

I. Integrales dobles

52. Definición 117
53. Cálculo de una integral doble 118
54. Observación sobre la forma de escribir una integral doble 120
55. Ejemplos de integrales dobles 121
56. Cálculo de una superficie plana por medio de una integral doble ... 127
57. Ejemplos de cálculo de superficies 128
58. Cálculo de la superficie de una curva en coordenadas polares 131
59. Otros ejemplos en coordenadas polares 135
60. Cálculo de un volumen por cambio de variable 138
61. Aplicación de las integrales dobles al cálculo de los centros de gravedad 145
62. Caso en el que la curva viene dada en coordenadas polares 149
63. Aplicación de las integrales dobles al cálculo de momentos de inercia 150
64. Caso en que la curva viene dada en coordenadas polares 152
65. Otros ejemplos 153
66. Teorema de GREEN 157
67. Aplicación 158

II. Nociones sobre las integrales triples

68. Definición 161
69. Ejemplos 164

Lista recapitulativa de las fórmulas del Tomo IV 167

Ejercicios y problemas a resolver 175

Sumario del Tomo V 199

CAPITULO PRIMERO

CALCULO DE LOS MOMENTOS DE INERCIA

1. Definición de momento de inercia. — El momento de inercia de una línea, de una superficie o de un volumen es un concepto que interviene constantemente en Mecánica teórica, en Resistencia de Materiales y en el estudio de los motores. Por ejemplo, los momentos de inercia aparecen en el estudio de los cuerpos que giran (árboles, volantes, inducidos de dínamo, cuadro de los aparatos de medida eléctrica), en el cálculo de la energía cinética, en el estudio de la flexión y torsión de los cuerpos, etc.

Por ejemplo, sea un disco compacto y homogéneo, de radio R, que gira a una velocilad angular ω constante:

$\omega = \frac{2\pi N}{60}$ (N = número de vueltas por minuto)

donde ω se expresa en radianes por segundo.

Consideremos en la figura 1, una pequeña masa m situada a la distancia r del centro. Sabemos que la velocidad tangencial v es:

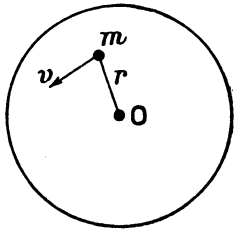

FIG. 1

$$v = 2\pi r \cdot \frac{N}{60} = r\omega,$$

la energía cinética es $\frac{1}{2} mv^2$ y si tomamos todas las masas m_1, m_2, m_3, ... del cuerpo situadas a distancias r_1, r_2, r_3, ... del centro, sus velocidades tangenciales son:

$$v_1 = r_1\omega \qquad v_2 = r_2\omega \qquad v_3 = r_3\omega \ldots,$$

la energía cinética total de la masa del disco es, evidentemente, igual a la suma de las energías cinéticas parciales:

$$W = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2 \ldots) = \frac{1}{2}\omega^2 (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots),$$

pero, en realidad, debemos tomar masas puntuales infinitamente pequeñas dm y efectuar luego la suma de las energías cinéticas, que son infinitas en número:

$$W = \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^R dm\, r^2,$$

y la expresión $\int dm\, r^2$, que vamos a aprender a calcular, como veremos, se llama *momento de inercia* I *del disco respecto al eje.*

— Sabemos que la masa de un cuerpo, es decir, su «*inercia*», interviene en el arranque o en la parada de un cuerpo; recordaremos que «*momento*» es el producto de una fuerza por una distancia. La energía cinética del disco puede, por tanto, escribirse:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\omega^2 I}$$

fórmula fundamental de los cuerpos en rotación, que se aplica tanto al inducido de una dínamo, al cuadro móvil de un aparato de medida eléctrica, como... a un obús que gira alrededor de su eje.

Podemos generalizar el concepto de momento de inercia.

Definición. — *Se llama momento de inercia de un cuerpo, respecto a un eje cualquiera, a la suma de los productos que se obtienen multiplicando cada masa elemental dm por el cuadrado de su distancia r al eje:*

$$I = \int dm\, r^2.$$

Generalización:

Podemos también considerar el momento de inercia de las superficies o de las líneas, reemplazando la superficie o la longitud de la línea por una masa de igual valor.

Podemos calcular los momentos de inercia respecto a un plano o respecto a un punto, tomando las distancias respecto al plano o respecto al punto.

$$I = \int dm\, r^2 \qquad \text{o bien} \qquad \int ds\, r^2,$$

y, cuando se calcula respecto a un punto, se llama *momento de inercia polar.*

— Este libro no es un tratado de Mecánica, y no podemos extendernos mucho. Sin embargo, como el cálculo de los momentos de

inercia es una interesante aplicación de las integrales, calcularemos un cierto número de momentos de inercia a título de ejercicios de integrales.

Se utilizan, para su cálculo, dos teoremas fundamentales.

2. Teoremas fundamentales.

Teorema I. — *El momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares que pasan por dicho punto.*

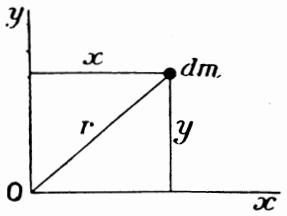

FIG. 2

— Consideremos la figura 2, en la que una una masa dm (o bien una pequeña superficie ds) está situada a una distancia r del polo O; tenemos:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

El momento de inercia I_0 del cuerpo, respecto al polo O, será, por tanto:

$$I_0 = \int dm\, r^2 = \int dm(x^2 + y^2) = \int dm\, x^2 + \int dm\, y^2,$$

es decir:

$$I_0 = I_y + I_x. \qquad \text{c.q.d.}$$

Teorema II. — *El momento de inercia respecto de un eje cualquiera es igual al momento de inercia del cuerpo respecto a un eje paralelo al primero y que pasa por el centro de gravedad del cuerpo, aumentado en* MD^2, *donde* M *es la masa del cuerpo y* D *la distancia entre los dos ejes.*

— Sea una pequeña masa dm cualquiera que imaginamos en perspectiva sobre la figura (dm está *delante* del plano de la figura 3).

Consideremos dos ejes paralelos, uno que pasa por el centro de gravedad G del cuerpo, y otro eje X cualquiera, a la distancia D del primero (fig. 3).

El momento de inercia del cuerpo respecto a este último eje X es, siendo ρ la distancia de dm a este eje:

$$I_x = \sum dm\, \rho^2.$$

Tracemos la recta D que une los dos ejes entre sí, y tracemos desde dm la perpendicular x a D. Llamemos r a la distancia desde

dm hasta el eje que pasa por G, y llamemos p al segmento indicado en la figura, con lo cual tenemos:

$$r^2 = x^2 + p^2.$$

Tendremos entonces (siendo D una constante):

$$\begin{aligned} I_x &= \sum dm[x^2 + (D - p)^2] \\ &= \sum dm(x^2 + D^2 + p^2 - 2Dp) \\ &= \sum dm(x^2 + p^2) + \sum dm(D^2 - 2Dp) \\ &= \sum dm \cdot r^2 + D^2 \cdot \sum dm - 2D \cdot \sum dm \cdot p. \end{aligned}$$

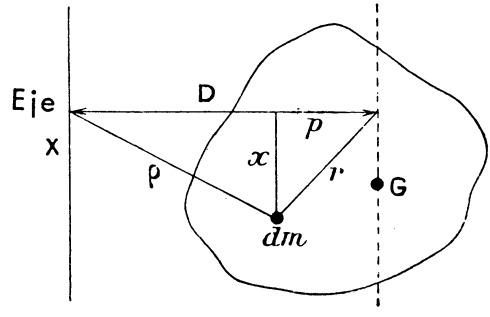

FIG. 3

Pero $\sum dm \cdot r^2$ es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje que pasa por G y $\sum dm \cdot p$ es la suma de los momentos de las masas dm respecto al plano que pasa por G y perpendicular al plano de los dos ejes (por tanto, perpendicular al plano de la figura y pasando por G). Pero la suma de estos momentos es igual al momento de la resultante M respecto al mismo eje y *como el eje pasa por* G, *el momento de* M *es nulo;* por tanto:

$$\sum dm \cdot p = 0.$$

Nos queda:

$$\boxed{I_x = I_G + M \cdot D^2} \qquad \text{c.q.d.}$$

Resulta que:

$$I_x > I_G,$$

es decir, *el momento de inercia es mínimo cuando se toma respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad.*

— Los dos teoremas anteriores sirven constantemente en el cálculo de los momentos de inercia.

Hagamos algunos ejemplos de aplicación.

3. Ejemplos de momentos de inercia de las líneas. — Se asimila la longitud de la línea a una masa.

Primer ejemplo. — Calcular el momento de inercia de una línea OA *de longitud* L, *respecto al eje* x (fig. 4).

— Sea un elemento dl que se encuentra a una distancia y del eje OX; su momento de inercia será:

$$dI = dl \cdot y^2$$

de donde:

$$I = \int y^2 dl,$$

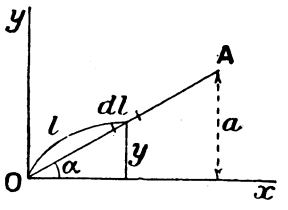

FIG. 4

pero:

$$y = l \operatorname{sen} \alpha \qquad \text{y} \qquad dl = \frac{dy}{\operatorname{sen} \alpha},$$

lo cual nos da:

$$I = \int_0^a \frac{y^2 dy}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^a$$

donde $a = L \operatorname{sen} \alpha$. Se tendrá, finalmente:

$$I = \frac{1}{3 \operatorname{sen} \alpha} (a^3) = \frac{L^3 \operatorname{sen}^3 \alpha}{3}.$$

Segundo ejemplo. — Momento de inercia de una semicircunferencia respecto al eje OX (fig. 5).

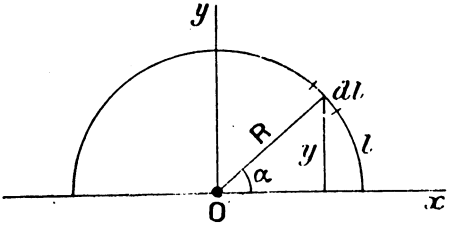

FIG. 5

— Sea un elemento dl que está a una distancia y del eje; tenemos:

$$I_x = \int_0^R dl\, y^2$$

pero:

$$l = R\alpha \qquad dl = R\, d\alpha$$

y

$$y = R \operatorname{sen} \alpha$$

de donde:

$$I_x = \int_0^{\pi} R d\alpha \cdot R^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = R^3 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \alpha\, d\alpha = R^3 \frac{\pi}{2}.$$

Tercer ejemplo. — Momento de inercia de una llanta respecto al centro (suponiendo que el espesor de la llanta es despreciable respecto al radio R) (fig. 6).

— Tenemos:

$$I_0 = \int dlR^2 = R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi R^3.$$

Si es un volante delgado, de masa M (toda la masa se encuentra, por tanto, a la misma distancia R del centro) y cuya masa por unidad de longitud es m:

$$I_0 = m \cdot 2\pi R^3 = 2\pi R m \cdot R^2 = MR^2 = \frac{P}{g} R^2.$$

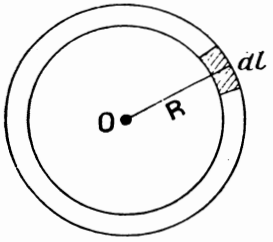

FIG. 6

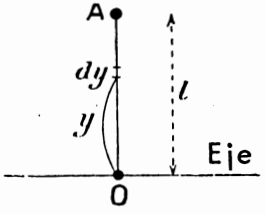

FIG. 7

Cuarto ejemplo. — Momento de inercia de una recta perpendicular a un eje (fig. 7).

— Tomemos un elemento dy que se encuentra a la distancia y del eje; su momento de inercia será:

$$dI = dy \cdot y^2$$

de donde:

$$I = \int_0^l y^2 dy = \frac{l^3}{3}$$

Quinto ejemplo. — Momento de inercia de una circunferencia respecto a un diámetro cualquiera.

— Apliquemos el teorema I, partiendo del momento de inercia respecto al centro O calculado anteriormente, y si llamamos I_x e I_y a los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares ($I_x = I_y$ por simetría):

$$I_0 = I_x + I_y = 2I_x$$

de donde:

$$I_x = \frac{I_0}{2} = \frac{2\pi R^3}{2} = \pi R^3.$$

4. Momentos de inercia de superficies. — Asimilamos las superficies a masas cuyos valores vienen representados por el mismo número que expresa su superficie.

Primer ejemplo. — Momento de inercia de un rectángulo respecto a su base (fig. 8), *y respecto a un eje que pasa por* G.

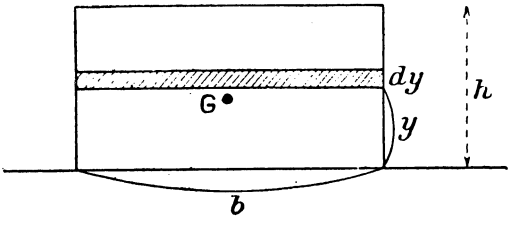

FIG. 8

— Para una rebanada dy, que se encuentra a una distancia y de la base, tenemos:

$$dI = b\,dy \cdot y^2$$

de donde:

$$I = \int_0^h by^2 dy = \frac{bh^3}{3}.$$

Respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad G del rectángulo (y paralelo a la base), el teorema II nos da:

$$I = I_G + SD^2 \qquad \left(\text{siendo } D = \frac{h}{2}\right)$$

de donde:

$$I_G = \frac{bh^3}{3} - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}.$$

Podríamos también calcular $\int by^2 dy$ integrando desde $-\frac{h}{2}$ hasta $+\frac{h}{2}$

Segundo ejemplo. — Momento de inercia de la superficie del círculo respecto al centro O (fig. 9).

— Sea un pequeño anillo de radio r y de espesor dr; respecto al centro O, tendremos:

$$dI = dS \cdot r^2 = 2\pi r\, dr \cdot r^2$$

de donde:

$$I = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

El primer teorema nos daría el momento de inercia respecto a un diámetro, ya que $I_0 = I_x + I_y = 2I_x$,
de donde:

$$I_x = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

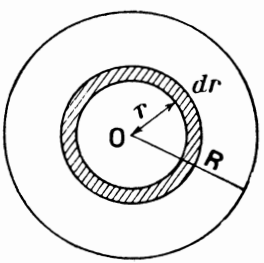

FIG. 9

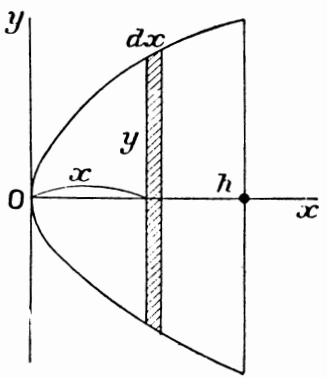

FIG. 10

Tercer ejemplo. — Momento de inercia de la superficie de una parábola respecto a la tangente en el vértice (fig. 10).

— Sea la parábola clásica $y^2 = 2px$. Tomemos una rebanada dx de abscisa x, su momento de inercia respecto a la tangente en O será:

$$dI = dS \cdot x^2 = 2y\, dx \cdot x^2$$

de donde:

$$I = \int_0^h 2yx^2 dx = \int_0^h 2 \cdot \sqrt{2px} \cdot x^2 dx$$

$$= 2\sqrt{2p} \int_0^h x^{\frac{5}{2}} dx = 2\sqrt{2p} \cdot \frac{2}{7}\left[x^{\frac{7}{2}}\right]_0^h = \frac{4}{7}\sqrt{2p}\, h^{\frac{7}{2}}$$

Cuarto ejemplo. — Momento de inercia de la superficie de un triángulo respecto a su base (fig. 11).

— Supongamos un triángulo isósceles de altura h y base b. El momento de inercia de una pequeña rebanada dy de anchura x, situada a la distancia y de la base, será:

$$dI = x\,dy \cdot y^2$$

de donde:

$$I = \int_0^h xy^2\,dy.$$

Pero, tenemos:

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \text{de donde} \quad x = b\left(\frac{h-y}{h}\right),$$

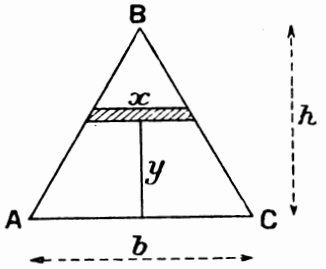

FIG. 11

sustituyamos en I:

$$I = \int_0^h b\left(\frac{h-y}{h}\right)\cdot y^2 dy = \int_0^h by^2 dy - \int_0^h \frac{b}{h}y^3 dy = b\,\frac{h^3}{3} - \frac{b}{h}\cdot\frac{h^4}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

5. Momentos de inercia de volúmenes. — Tanto si es respecto a un eje, como si es respecto a un plano, basta con calcular $\int dm\,r^2$. Haremos solamente un ejemplo, pero muy importante.

Ejemplo. — Momento de inercia de un cilindro, respecto a su eje.

— Es, por ejemplo, un eje de máquina.

Sea R el radio y l la longitud. Consideremos un tubo de radio r y de espesor dr (fig. 12). Su momento de inercia respecto al eje es, llamando μ a la masa por unidad de volumen del metal:

$$dI = dm \cdot r^2 = \mu \cdot 2\pi r l\,dr \cdot r^2$$

de donde:

$$I = \int_0^R 2\pi l\mu r^3 dr = 2\pi l\mu\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi l\mu R^4}{2},$$

pero $\pi R^2 l\mu$ es la masa M del sólido, de donde:

$$\boxed{I = M\frac{R^2}{2}}$$

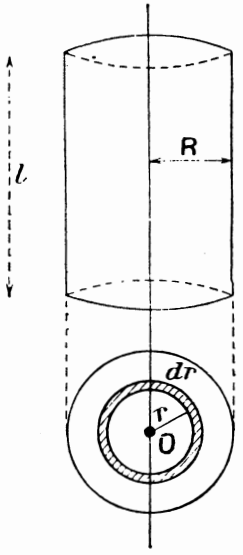

FIG. 12

Observación I. — Todos estos cálculos de los momentos de inercia sirven en Resistencia de Materiales para el cálculo de vigas o de piezas que trabajan a flexión o torsión; por ejemplo, cigüeñales de motores.

Observación II. — Veremos más adelante (§ 63) que las integrales dobles permiten calcular, *directamente,* los momentos de inercia de superficies o de volúmenes.

Observación III. — En este tomo, al final del capítulo II (pág. 58), damos una aplicación interesante de los momentos de inercia, planteando el teorema fundamental de los cuerpos en rotación, teorema que tiene innumerables aplicaciones. Veremos algunas de ellas en las *Ecuaciones diferenciales* (Ver Tomo V).

CAPITULO II

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS INTEGRALES

Veamos algunas aplicaciones de las integrales a la Electricidad, Mecánica, Radioelectricidad, etc.

6. Cálculo del potencial eléctrico en un punto de un campo electrostático. — Es necesario, ante todo, recordar la definición de potencial en un punto de un campo electrostático.

Supongamos que tenemos una carga electrostática q puntual y positiva. Dicha carga creará alrededor de ella un campo electrostático (fig. 13).

— *Sabemos que el potencial en un punto de un campo electrostático es igual al trabajo que hay que realizar para transportar la unidad de carga, desde este punto hasta el infinito, en el vacío. El trabajo realizado es independiente del camino recorrido.*

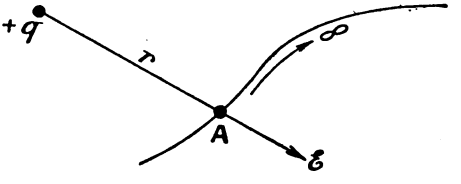

FIG. 13

Sea un punto A situado a la distancia r de una carga eléctrica $+ q$, y supongamos que se coloca en este punto A una carga unidad $+ 1$. La fuerza de repulsión que se ejerce sobre ella viene dada por la ley de COULOMB, y se llama intensidad E del campo electrostático:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot 1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

donde ε_0 es la permitibidad o constante dialéctrico del vacío.

Transportemos esta carga hasta el infinito y demostremos que el trabajo total es independiente del camino recorrido.

Consideremos una trayectoria *cualquiera* que va desde el punto A hasta el infinito y sea $dx = AB$ un desplazamiento a partir del punto A y a lo largo de esta trayectoria (dx es tan pequeño que podemos suponer que E es constante durante este recorrido y que dx es una línea recta) (fig. 14).

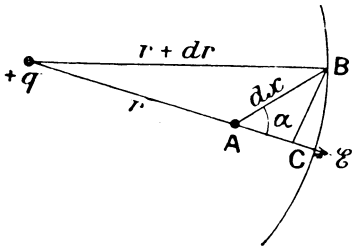

FIG. 14

Para ir desde A hasta B el trabajo realizado será:

$$dW = E\,dx\cos\alpha.$$

Tracemos la perpendicular BC sobre r, y tendremos:

$$dW = E \cdot AC = E\,dx\cos\alpha.$$

Si trazamos, tomando q como centro, la circunferencia de radio $r + dr$, podremos decir que $dx\cos\alpha$ es igual a dr, y esto con una aproximación de un infinitésimo de segundo orden:

$$AB - AC = dx(1 - \cos\alpha),$$

sabemos, en efecto, que $1 - \cos\alpha$ es un infinitésimo de segundo orden.

Tenemos, por tanto:

$$dW = E\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dr,$$

y el trabajo total será:

$$W = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q\,\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_r^\infty$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right] = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r}.$$

Este trabajo es, por definición, igual al potencial en el punto A, *y es independiente del camino recorrido, ya que tan sólo depende de los límites.*

Si tuviéramos varias cargas q_1, q_2, q_3 ... alrededor de A, haríamos el mismo cálculo para cada una de ellas, y el potencial resultante es:

$$V_A = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r}$$

7. Cálculo del potencial en el interior de una esfera electrizada. Consideremos una esfera metálica, hueca o no, cargada de electricidad estática. Sabemos que las cargas electrostáticas se colocan sobre la superficie de los cuerpos. Llamemos Q a la carga total de esta esfera y R a su radio (fig. 15).

Sea un punto cualquiera A en el interior de la esfera situado a la distancia a del centro. Calculemos $\sum \frac{q}{r}$, teniendo en cuenta que este punto A está situado a distancias variables de las cargas eléctricas depositadas sobre la superficie.

— Coloquémonos a una distancia x de A. Demos a x un incremento dx, el cual determina sobre la superficie esférica un anillo, o más exactamente una zona esférica, cuya superficie es (ver curso de geometría):

$$dS = 2\pi R dx.$$

Pero, dx es tan pequeño que podemos decir que todas las cargas situadas en la zona esférica están a una distancia r del punto A.

La carga en esta zona esférica es, llamando δ a la densidad electrostática (es decir, el cociente de la carga entre la superficie):

$$dq = \delta \cdot dS = \delta \cdot 2\pi R\, dx.$$

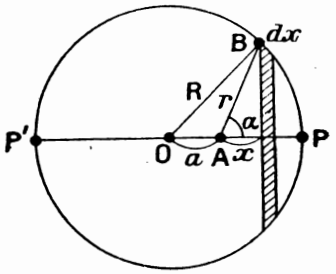

FIG. 15

El potencial dV en el punto A, debido a esta zona esférica será, por tanto:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{\delta \cdot 2\pi R\, dx}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Antes de integrar, tenemos que encontrar una relación entre r y x; del triángulo OAB deducimos:

$$R^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos\alpha$$
$$= r^2 + a^2 + 2a\,x.$$

Diferenciemos, observando que R y a son constantes, y que r y x son las únicas variables:

$$0 = 2r\,dr + 0 + 2a\,dx$$

de donde:

$$dx = -\frac{r\,dr}{a}.$$

Tendremos, por tanto:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\delta \cdot 2\pi R}{r} \left(-\frac{r\,dr}{a}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi R dr \delta}{a}.$$

— Integremos desde P hasta P', teniendo en cuenta que r varía desde $(R - a)$ hasta $(R + a)$ y tomemos el valor absoluto del potencial V:

$$V = \frac{2\pi R\delta}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_{R-a}^{R+a} dr = \frac{2\pi R\delta}{4\pi\varepsilon_0 a} \Big[r \Big]_{R-a}^{R+a}$$
$$= \frac{2\pi R\delta}{4\pi\varepsilon_0 a} \Big[(R + a) - (R - a) \Big] = \frac{R\delta}{\varepsilon_0},$$

o también:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4\pi R^2\delta}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{S\cdot\delta}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R}$$

en efecto, $S\delta$ es la carga total Q de la esfera.

Este valor de V es por tanto independiente de a, es decir, *el potencial en el interior de la esfera es constante*; no importa que la esfera sea hueca o no.

Recordaremos que se llama *capacidad de un cuerpo* al cociente entre su carga Q y su potencial V:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Aplicando esta definición a la esfera anterior, obtenemos su capacidad C:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

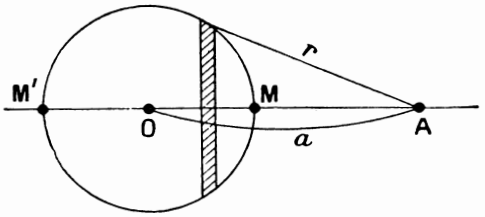

FIG. 16

Caso en que el punto es exterior a la esfera.

— Para un punto situado en el exterior de la esfera (fig. 16), basta cambiar los límites e integrar desde M hasta M', siendo los nuevos límites, $(a - R)$ para M y $(a + R)$ para M':

$$V = \frac{2\pi R\delta}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{a-R}^{a+R} dr = \frac{2\pi R\delta}{4\pi\varepsilon_0 a}\,[(a+R)-(a-R)]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi R^2\delta}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{S\cdot\delta}{a}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{a},$$

por tanto, *todo sucede como si la carga total Q fuera puntual y estuviera situada en el centro de la esfera, a una distancia a del punto* A.

Observaremos que, en este caso, el potencial varía en razón inversa con la distancia, y como se demuestra en electricidad que el campo eléctrico E es la derivada (cambiada de signo) del potencial, tenemos:

$$E = -\frac{dV}{da} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{a^2}$$

es decir, que el campo eléctrico es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

8. Cálculo de la capacidad eléctrica de un condensador plano.— Supongamos que las armaduras del condensador son circulares, y llamemos:

$V_A - V_B$ a la diferencia de potencial entre las bornas,
Q a la carga almacenada en el condensador,
C a la capacidad $\left(C = \frac{Q}{V_A - V_B}\right)$.

Para que las líneas de fuerza sean homogéneas y no se produzcan efectos en los bordes, rodearemos cada una de las armaduras con un anillo de guarda (unido eléctricamente a la armadura), y representaremos en la figura la sección de este conjunto, mostrando el espesor de las armaduras. Llamemos S a la superficie de uno de los discos interiores y calculemos la capacidad de estos dos discos paralelos aplicando el teorema de GAUSS.

Recordemos el enunciado del teorema de GAUSS: *El flujo total* Φ, *que sale por una superficie cerrada (se entiende la superficie que rodea a un volumen y no la superficie plana) es igual a la suma de los términos siguientes:*

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum \textit{de las cargas interiores} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\sum \textit{de las cargas superficiales}$$

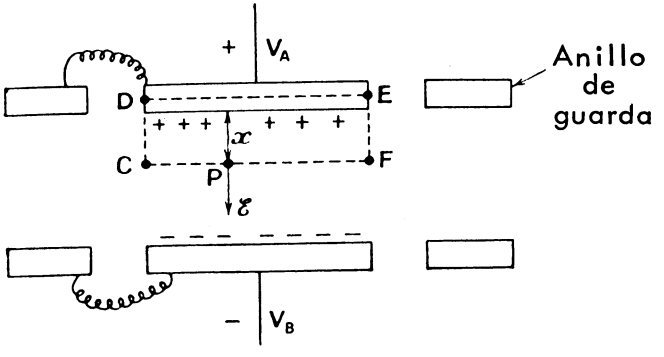

FIG. 17

sabiendo que flujo electrostático a través de una superficie es el producto de la intensidad E del campo electrostático, por la superficie.

—Tenemos que aplicar el teorema de GAUSS a un cierto volumen. Para esto (fig. 17), coloquémonos en un punto P cualquiera del aislante, a la distancia x de la placa superior, y sea E la intensidad del campo electrostático en este punto.

Tracemos por el punto P, una paralela a las placas (es una línea equipotencial perpendicular a las líneas de fuerza), y consideremos el volumen del cilindro cuya sección es CDEF, imaginando que la tapa de este cilindro pasa por el *interior* de una de las placas.

Como la carga eléctrica Q está en el interior de este volumen cilíndrico, tendremos:

$$\Phi_t = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \quad (\textit{el aislante es el aire}).$$

Por otra parte, el flujo total está compuesto por tres partes:

1.° El flujo que sale por el fondo de la caja cilíndrica, es decir: $\Phi = E \cdot S$.

2.° El flujo que sale por la pared lateral de la caja cilíndrica, y que es nulo, ya que las paredes DC y EF son verticales y el campo es vertical.

3.° El flujo que sale por la tapa DE, que es nulo, *ya que el campo electrostático en el interior de un conductor cargado es nulo.*

Nos queda por tanto:

$$\Phi_t = \frac{1}{\varepsilon_0} Q = E \cdot S = -\frac{dV}{dx} \cdot S,$$

separemos las variables:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{S} \cdot dx = -dV.$$

Integremos desde 0 hasta e:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{S} \int_0^e dx = -\int_{V_A}^{V_B} dV$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{S} \cdot e = -[V_B - V_A] = V_A - V_B.$$

La capacidad C, será, por tanto:

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}.$$

Cualquiera que sea la forma del condensador (plano, cilíndrico o tubular) se encuentra siempre esta misma fórmula, siempre que el espesor e del aislante sea pequeño comparado con la superficie de la armadura.

— *Carga y descarga de un condensador a través de una resistencia.*

Este problema es una aplicación excelente del cálculo integral, pero como hay que integrar ecuaciones diferenciales, lo estudiaremos en el Tomo V, dedicado a las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, recordaremos que la descarga de un condensador se estudió al principio del tomo III, como ejercicio para mostrar el empleo de las integrales.

9. Demostración matemática de la ley de Ohm. — Conocemos la ley de OHM, en electricidad: *La diferencia de potencial* V *en los extremos de una resistencia* R *es, llamando* I *a la intensidad de corriente, igual a*:

$$V = R\,I. \qquad \begin{pmatrix} V \text{ en voltios} \\ R \text{ en Ohmios} \\ I \text{ en Amperios} \end{pmatrix}$$

Tomemos, por ejemplo, un hilo metálico y consideremos (fig. 18) dos secciones A y B que distan una longitud l y sea S la sección del hilo.

— La hipótesis de partida es la misma que en hidráulica, es decir, que *la intensidad de corriente (es decir la cantidad de electricidad que pasa por segundo) es proporcional a la sección del tubo, o del hilo, y a la presión interna,* es decir, a la fuerza que obliga a las cargas a desplazarse. Esta fuerza es la intensidad E del campo electrostático que existe en el hilo.

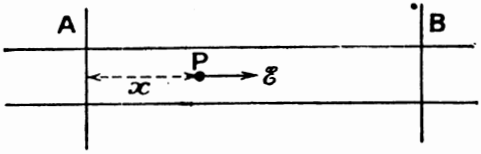

FIG. 18

— Coloquémonos en un punto P, a la distancia x de la sección A donde el potencial es V_A, y sea V_B el potencial en B. Siendo K un coeficiente de proporcionalidad desconocido, podremos escribir para la intensidad I de corriente:

$$I = KSE.$$

Si llamamos V al potencial en P, se demuestra en electrostática que el campo es la derivada, cambiada de signo, del potencial:

$$E = -\frac{dV}{dx},$$

de donde:

$$I = KS\left(-\frac{dV}{dx}\right)$$

Separemos las variables:

$$\frac{I\,dx}{KS} = -\,dV$$

integremos desde 0 a l:

$$\frac{I}{KS}\int_0^l dx = -\int_{V_A}^{V_B} dV$$

o bien:

$$\frac{Il}{KS} = -\,[V_B - V_A] = V_A - V_B$$

de donde:

$$V_A - V_B = \frac{l}{KS}\,I.$$

El término $\frac{l}{KS}$, que depende solamente de las dimesiones del hilo y de la naturaleza del metal, se llama resistencia R del hilo:

$$R = \frac{l}{KS} = \rho\frac{l}{S},$$

siendo ρ la resistividad del metal. Tendremos, por tanto, la ley de OHM:

$$V = RI.$$

10. Aplicación electromagnética. — *Demostrar la ley de* BIOT *y* SAVART, *partiendo de la ley de* LAPLACE. *La ley de* BIOT *y* SAVART, *da la intensidad del campo magnético en un punto* P, *situado a una distancia a, de un hilo muy largo y rectilíneo por el que pasa una corriente eléctrica.*

— Sabemos que un hilo eléctrico produce en sus proximidades un campo magnético inducido. Sea un hilo rectilíneo de longitud teóricamente infinita (en la práctica un hilo muy largo) recorrido por una corriente I. La ley de BIOT y SAVART, que es puramente experimental, da la inducción B del campo magnético a la distancia a del hilo (fig. 19).

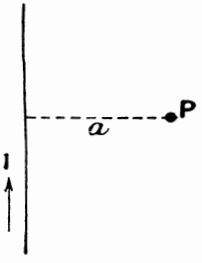

FIG. 19

La inducción B es perpendicular al plano de la figura y su sentido viene dado por la regla de AMPERE; su valor es:

$$\boxed{B = K\frac{I}{a}}$$

donde K es un coeficiente de proporcionalidad que depende de las unidades empleadas.

— LAPLACE fue más ambicioso: buscó la fórmula general que diera la inducción magnética producida a una distancia r por un elemento de longitud dl, recorrido por una corriente I. Encontró la célebre fórmula *que es la base de todo el electromagnetismo y de la inducción* (fig. 20), y esta fórmula en el sistema SI es:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\, dl \operatorname{sen} \alpha}{r^2}$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío y α es el ángulo que forma el elemento dl con r (ángulo agudo u obtuso, que tienen el mismo seno), y esta fórmula, aplicada en particular a un hilo recto infinito, permite encontrar la ley de BIOT y SAVART.

— Desde un punto P cualquiera,

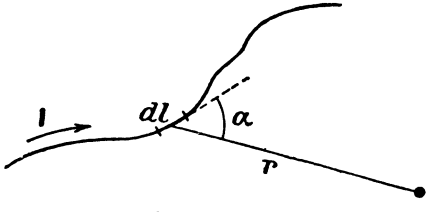

FIG. 20

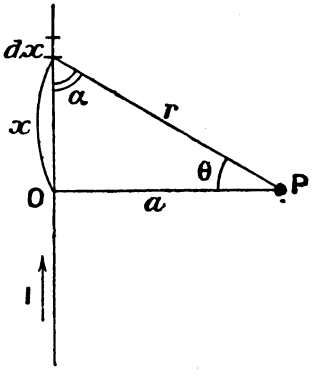

FIG. 21

situado a una distancia a del hilo, tracemos la perpendicular PO y coloquémonos sobre el hilo, a una distancia x del punto O (fig. 21).

Demos a x un incremento dx; el elemento dx produce, sobre una masa magnética m colocada en P, una fuerza df que es igual a:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\, dx \operatorname{sen} \alpha}{r^2}.$$

Expresaremos dx, $\operatorname{sen} \alpha$ y r en función del ángulo θ:

$$x = a \operatorname{tg} \theta \qquad \text{de donde} \qquad dx = a \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \theta \qquad \text{y} \qquad a = r \cos \theta$$

Tenemos por tanto:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m\,I\,\dfrac{a\,d\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos\theta}{\dfrac{a^2}{\cos^2\theta}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \cos\theta\, d\theta.$$

Para obtener la fuerza total, basta integrar θ desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $+\frac{\pi}{2}$, o bien hacer variar θ, desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ y multiplicar luego por 2:

$$B = 2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{I}{a} \cos\theta \cdot d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = K\frac{I}{a}.$$

Encontramos así la ley de BIOT y SAVART, y esta fórmula nos da, además, el valor del coeficiente K de dicha ley, que es igual a $\frac{\mu_0}{2\pi}$, donde I se expresa en amperios y a en metros. La permeabilidad μ_0, en el vacío, vale $4\pi \times 10^{-7}$.

11. Cálculo del campo de inducción en el centro de un solenoide. Sea N el número total de espiras, l la longitud axial del solenoide e I la intensidad de corriente. La figura 22 representa una sección de la bobina.

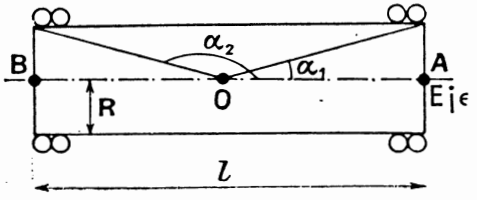

FIG. 22

Calculemos la inducción magnética B en el centro O de la bobina. Para esto, utilizaremos la fórmula de electricidad que da el valor de la inducción B, producida por una espira, sobre el eje de la espira y a una distancia a del centro (siendo R el radio de la espira):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

— Coloquémonos a la distancia x del centro O, y demos a x un incremento dx. En la bobina, el número de espiras por unidad de longitud es $\frac{N}{l}$, y el número de espiras en una longitud dx será $\frac{N}{l} \cdot dx$.

Todas estas espiras, producen en O una inducción dB:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{N}{l}\, dx,$$

e integrando desde A hasta B:

$$B = \frac{\mu_0 INR^2}{2l} \int_A^B \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hagamos: $x = R \cdot \operatorname{tg} \varphi$ de donde $dx = R(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)d\varphi$

de donde:

$$B = \frac{\mu_0 INR^2}{2l} \int_A^B \frac{R(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)d\varphi}{[R^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 IN}{2l} \int_A^B \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2l} \int_A^B \cos\varphi\, d\varphi.$$

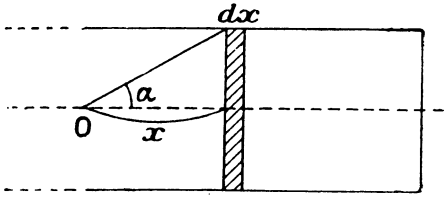

FIG. 23

Como tenemos que $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{R}$, observaremos, según la figura 23, que el ángulo φ es complementario del ángulo α; por tanto: $\cos\varphi = \operatorname{sen}\alpha$, y como α varía desde α_1 hasta α_2:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{sen}\alpha \cdot d\alpha = -\frac{\mu_0 NI}{2l} \Big[\cos\alpha\Big]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = -\frac{\mu_0 NI}{2l} [\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1]$$

pero:

$$\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos\alpha_1$$

nos queda:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 NI \cos \alpha_1}{l}}$$

Finalmente, si la bobina es muy larga (respecto a su diámetro), tenemos: $\cos \alpha \approx 1$, y nos queda la fórmula clásica:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 NI}{l}}$$

12. Desaparición de la corriente eléctrica en una bobina de inducción. — Tomemos una bobina en serie con un generador de electricidad, por ejemplo, un acumulador. Cerremos el interruptor colocado en las bornas de la bobina (fig. 24). La corriente I en la bobina no desaparece inmediatamente: en efecto, al desaparecer el flujo magnético Φ, se produce, por inducción, en la bobina, una fuerza electromotriz de inducción e, cuyo valor instantáneo viene dado por la conocida fórmula de electricidad:

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

y en este momento, el generador no actúa.

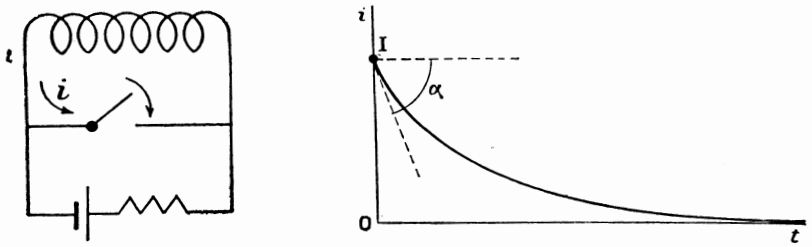

FIG. 24

Veamos cómo desaparece la corriente en la bobina, es decir, busquemos la función $i = f(t)$, donde t es el tiempo.

— Llamaremos R a la resistencia de la bobina, y L a su inductancia (o coeficiente de autoinducción). Coloquémonos en un instante cualquiera (mientras que la corriente está desapareciendo) y apliquemos a la bobina la ley de OHM:

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{L di}{R dt} \quad \text{o bien:} \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt.$$

Integremos: En el instante en que nos colocamos, t ha variado desde 0 hasta t, e i ha variado desde I hasta i:

$$\int_I^i \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$[\text{Log } i]_I^i = -\frac{R}{L}[t]_0^t$$

$$\text{Log } i - \text{Log I} = -\frac{R}{L}t = \text{Log}\frac{i}{I}$$

de donde:
$$\frac{i}{I} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

y
$$\boxed{i = I \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}$$

t en segundos
L en henrios
R en ohmios
i, I en amperios
$e = 2{,}71828...$

Es una exponencial decreciente. El cociente $\frac{L}{R}$ se llama *constante de tiempo* θ de la bobina y como las ecuaciones de dimensión muestran que este cociente es homogéneo con el tiempo, se expresa en segundos:

$$\boxed{\theta = \frac{L}{R}}$$

— Construyamos la curva con exactitud:

para $t = 0 \qquad i = I$

para $t = \infty \qquad i = 0.$

Calculemos la derivada:

$$i' = I\, e^{-\frac{R}{L}t}\left(-\frac{R}{L}\right),$$

dicha derivada no puede anularse para un valor finito de t, por tanto, no tiene ni máximo ni mínimo. Finalmente, la derivada es siempre negativa e i decrece continuamente.

Para $t = \infty \qquad i' = 0$

$$t = 0 \qquad i' = \text{tg}\,\alpha = -\frac{RI}{L},$$

por tanto, la curva en el origen tiene una inclinación:

$$\text{tg}\,\alpha = -\frac{I}{\theta} \qquad \text{(siendo } \alpha \text{ negativo).}$$

Cuanto menor es la constante θ, mayor es el ángulo α; cuanto mayor es la constante θ, menor es el ángulo α, en cuyo caso, la curva se aproxima a una línea recta.

— Es fácil ver que θ es el tiempo al cabo del cual la corriente i es, aproximadamente, la tercera parte de su valor inicial. En efecto, si reemplazamos t por θ, tenemos:

$$i = I \cdot \frac{1}{e^{\frac{\theta}{\theta}}} = \frac{I}{2{,}7} \approx \frac{I}{3}.$$

Es decir, que θ expresa la inercia eléctrica del circuito y por esto se llama «*constante de tiempo*».

— Calculemos ahora al cabo de cuanto tiempo la corriente será la centésima parte de su valor inicial:

$$i = \frac{I}{100} = I \cdot \frac{1}{e^{\frac{R}{L}t}},$$

de donde:

$$100 = e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{R}{L}t = \text{Log } 100 = 2{,}3 \log_{10} 100 = 4{,}6$$

de donde:

$$t = 4{,}6 \frac{L}{R} \simeq 5\,\theta.$$

Ejemplo. — Sea L = 100 henrios, R = 100 ohmios e I = 100 mA. La constante de tiempo será:

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{100H}{100\Omega} = 1 \text{ segundo.}$$

Al cabo de $t = \theta = 1$ segundo, la corriente será todavía 33 mA aproximadamente y al cabo de $5\,\theta$ o sea 5 segundos, valdrá 1 mA.

— Estudiaremos en el Tomo V (*Ecuaciones diferenciales*) la forma en que aparece la corriente en una bobina de inducción. La corriente no toma instantáneamente el valor $\frac{E}{R}$ que le asigna la ley de KIRCHHOFF y es necesario calcular la energía suministrada.

13. Cálculo de la energía potencial contenida en un campo magnético. — Supongamos un toroide de hierro (fig. 25) bobinado regularmente, con objeto de que la inducción magnética B sea constante a lo largo de una circunferencia con centro en el eje del toroide. Conectemos en sus extremos una fuente de corriente continua y llamemos:

v al valor instantáneo de la diferencia de potencial,
R a la resistencia óhmica de la bobina;

Cerremos el interruptor. Sabemos que la corriente no toma inmediatamente el valor dado por la ley de OHM $I = \frac{V}{R}$, ya que el flujo varía y aparece en la bobina una fuerza contraelectromoctriz que se opone a la f.e.m. de la fuente. Estudiaremos este fenómeno en detalle en el Tomo V.

— Coloquémonos al cabo de un tiempo t, después del cierre del interruptor; en este momento la corriente es i.

Demos a t un incremento dt. Durante el tiempo dt, i varía en di y el flujo Φ varía en $d\Phi$. Aparece una f.e.m. e en cada una de las N espiras, y en electricidad se demuestra que su valor instantáneo es, en voltios:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde Φ se expresa en webers.

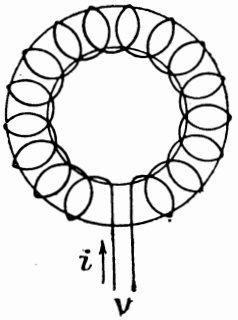

FIG. 25

Apliquemos la ley de OHM:

$$i = \frac{v - N\frac{d\Phi}{dt}}{R}$$

de donde:

$$v = Ri + N\frac{d\Phi}{dt}.$$

Multipliquemos los dos miembros por $i\,dt$, con objeto de hacer aparecer la energía dW (en julios) suministrada por la fuente durante el tiempo dt será:

$$dW = vi\,dt = Ri^2dt + Ni\,d\Phi,$$

y, si llamamos B a la inducción en el hierro, tendremos (puesto que $\Phi = B \cdot S$):

$$dW = Ri^2dt + NiS\,dB.$$

Pero, Ri^2dt expresa calorías, por tanto esta ecuación muestra que la fuente suministra dos energías: una calorífica en el hilo, y la otra que representa, evidentemente, la energía que se utiliza en aumentar el flujo en el hierro, energía almacenada en forma potencial en el hierro.

Llamemos l a la longitud media del circuito magnético del toroide; el valor de la inducción B es, por tanto (sistema *SI*):

$$B = \mu \frac{Ni}{l} \qquad (i \text{ en amperios})$$

de donde:

$$Ni = \frac{Bl}{\mu}.$$

Sustituyamos este valor en dW:

$$dW = Ri^2dt + \frac{lS}{\mu} BdB,$$

donde lS es el volumen de hierro.

Integremos desde el tiempo cero hasta el momento en el que la corriente toma su valor final I, y la inducción B igualmente; obtendremos la energía total suministrada por la fuente; suponiendo μ constante, tenemos:

$$W = \text{Calorías totales} + \text{Volumen} \cdot \frac{1}{\mu} \int_0^B B\,dB.$$

Observaremos que el hierro ha almacenado en forma de energía potencial, una energía cuyo valor en julios es:

$$\frac{\text{Volumen}}{\mu} \int_0^B B\,dB = \frac{\text{Volumen}}{\mu} \cdot \frac{B^2}{2}$$

por tanto, un centímetro cúbico de hierro contiene en forma potencial, una energía:

$$W = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2}.$$

Esta energía es proporcional al cuadrado de la intensidad H del campo magnético. Fórmula encontrada por MAXWELL.

14. Calcular el potencial a una distancia a de un disco electrizado de radio R. — *Después calcularemos el potencial de este disco*

si su radio es R = 20 *cm y si la carga* Q *de este disco es igual a* 100 *nanoculombios.*

— Como el potencial es constante en todos los puntos de un conductor cargado, podemos calcular el potencial en el centro. Pero, calcularemos en primer lugar, el potencial a la distancia a del centro (fig. 26).

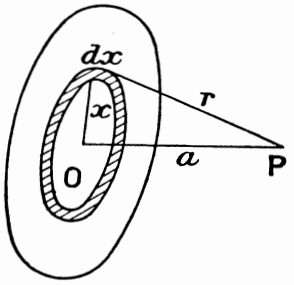

FIG. 26

Sabemos que el potencial en un punto cualquiera es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$ (ε_0 = constante dieléctrica del vacío)

siendo r la distancia del punto a las diferentes cargas y donde $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$. Como las cargas están repartidas por la superficie del disco, están a distancias variables del punto P.

— Coloquémonos, por tanto, sobre el disco, a una distancia x del centro O. Demos a x un incremento dx, lo cual nos delimita un pequeño anillo de espesor dx. La superficie del círculo de radio x es:

$$S = \pi x^2$$

y el incremeto de la superficie, es decir, la superficie del anillo será:

$$dS = 2\pi x\, dx,$$

que posee una carga dq cuyo valor es, llamando δ a la densidad de carga, que suponemos es constante:

$$dq = \delta \cdot dS = \delta \cdot 2\pi x\, dx.$$

El potencial en P debido a esta carga es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\delta \cdot 2\pi x\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

y el potencial total será:

$$V = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\delta}{4\varepsilon_0}\int_0^R \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2 + a^2}\right]_0^R$$

$$= \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + a^2} - a\right].$$

El potencial en O se obtiene haciendo $a = 0$:

$$V_0 = \frac{\delta R}{2\varepsilon_0} = \frac{\delta 2\pi R^2}{\varepsilon_0 4\pi R}.$$

Pero, si llamamos Q a la carga total del disco, cada una de las caras contendrá la mitad de la carga Q y tendremos:

$$\frac{Q}{2} = \pi R^2 \delta$$

por tanto:

$$V_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R} = \frac{100 \times 10^9}{8{,}85 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 0{,}2} = 450 \text{ V.}$$

15. Calcular la potencia suministrada por una corriente alterna. — Sea una diferencia de potencial:

$$v = V \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

y sea i una corriente, desfasada en un ángulo φ, respecto a la diferencia de potencial, por ejemplo, hacia atrás:

$$i = I \cdot \operatorname{sen} (\omega t - \varphi).$$

— Durante un tiempo dt, la energía suministrada será:

$$dW = vi\, dt.$$

Calculemos la energía total suministrada durante un período T:

$$W = \int_0^T V \operatorname{sen} \omega t \cdot I \operatorname{sen} (\omega t - \varphi)\, dt = VI \int_0^T \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} (\omega t - \varphi)\, dt.$$

Pero, sabemos que:

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)]$$

por tanto:

$$\operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)],$$

lo cual nos da dos integrales:

$$W = \frac{VI}{2} \left[\int_0^T \cos \varphi\, dt - \int_0^T \cos (2\omega t - \varphi)\, dt \right]$$

Pero hemos visto más arriba, que la integral del coseno, función del tiempo, tomada entre 0 y T es siempre nula, cualquiera que sea el ángulo. Nos queda solamente la primera integral:

$$W = \frac{VI}{2} \cos \varphi \int_0^T dt = \frac{VIT \cos \varphi}{2}.$$

La potencia P es la energía suministrada por segundo, y si F es la frecuencia (o sea, el número de períodos por segundo), $F = \frac{1}{T}$, tendremos:

$$P = F \cdot \frac{VIT \cos \varphi}{2} = \frac{VI \cos \varphi}{2} = \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I}{\sqrt{2}} \cos \varphi,$$

pero $\frac{V}{\sqrt{2}}$ es la diferencia de potencial eficaz, $\frac{I}{\sqrt{2}}$ es la corriente eficaz, de donde la fórmula fundamental que nos da *P* en vatios será:

$$\boxed{P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \varphi}$$

16. Cálculo de la potencia eléctrica perdida por corrientes de Foucault en las láminas de hierro. — Sabemos que, cuando se somete una masa metálica a una variación de flujo, se produce una fuerza electromotriz inducida que origina torbellinos de corriente en la masa del metal, que calientan a éste, por la ley de JOULE: Estas corrientes se llaman corrientes de FOUCAULT. Con objeto de evitar las corrientes de FOUCAULT, los núcelos megnéticos se construyen con láminas de hierro aisladas entre sí por una hoja de papel o bien por una película de óxido de hierro, muy duro y aislante.

— Calculemos la potencia eléctrica perdida en una lámina de espesor *e*, anchura *l* y altura *a*, y que está sometida a un flujo variable, perpendicular al plano de la figura 27, en la cual se muestra la sección de dicha lámina. Expresaremos las longitudes en metros.

Supondremos que la inducción B en el hierro, varía sinusoidalmente y que es constante, para un instante dado, en toda la sección:

$$B = B_0 \cdot \operatorname{sen} \omega t.$$

Podemos considerar que los torbellinos de corriente se cierran sobre sí mismos como lo indica la figura 27.

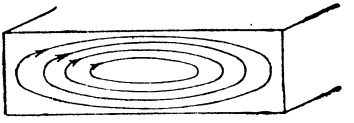

FIG. 27

Representemos una vista amplificada de la sección de una lámina y coloquémonos a la distancia x de la línea media AB, y a la distancia $x + dx$. Las dos rebanadas de espesor dx, arriba y abajo, forman los lados horizontales de una espira rectangular que se cierra verticalmente en sus dos extremidades; esta espira tiene una profundidad a (fig. 28).

Como el espesor de la rebanada es muy pequeño, la superficie S de esta espira es, aproximadamente:

$$S = l \cdot 2x,$$

el flujo a través de esta superficie es:

$$\Phi = B \cdot S = B_0 \operatorname{sen} \omega t \cdot l\, 2x, \text{ (en webers)}$$

y la fuerza electromotriz inducida en la espira rayada es:

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = B_0 \omega \cos \omega t \cdot l\, 2x \text{ voltios.}$$

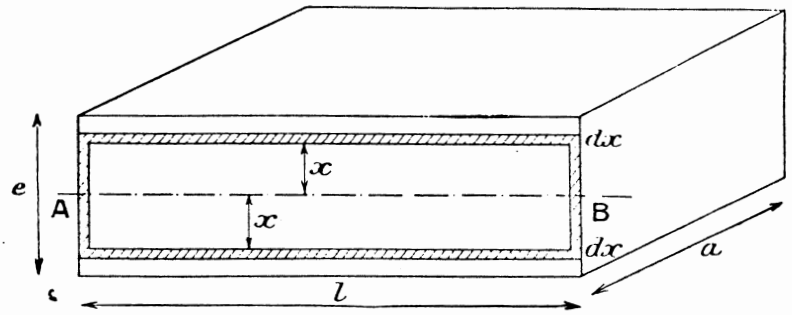

FIG. 28

Tendremos, por tanto, una corriente inducida que va a recorrer los cuatro lados rayados de esta espira, produciendo calor. La ley de JOULE nos da la potencia perdida en vatios:

$$P = RI^2_{ef} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{E^2_{ef}}{R}.$$

Calculemos la resistencia óhmica de esta espira, cuya longitud es $2(l + 2x)$, es decir, aproximadamente, $2l$ (ya que el espesor de la lámina es muy pequeño frente a l), y la sección de paso de la corriente es $a\,dx$.

El valor de la resistencia, será, llamando ρ a la resistividad:

$$R = \rho \cdot \frac{\text{longitud}}{\text{sección}} = \rho \cdot \frac{2l}{a\,dx} \text{ (en ohmios)}$$

— Por otra parte, el valor eficaz de la f.e.m. (del mismo modo que para la corriente eficaz) vendrá dado por:

$$E^2_{ef} = \frac{1}{T} \int_0^T e^2\, dt = \frac{1}{T} B^2_0 \omega^2 \cdot l^2 4x^2 \int_0^T \cos^2 \omega t\, dt,$$

sabemos que esta integral es igual a $\frac{T}{2}$ (ver Tomo III), de donde:

$$E^2_{ef} = B^2_0 \omega^2 l^2 2x^2.$$

y la potencia perdida será:

$$dP_w = \frac{B^2_0 \omega^2 l^2 2x^2}{\rho \frac{2l}{a\,dx}} = \frac{B_0^2}{\rho} \omega^2 l a x^2 dx.$$

— Para tener la potencia total, producida por corrientes de FOUCAULT, basta integrar, haciendo variar x desde 0 hasta $\frac{e}{2}$:

$$P_{total} = \int_0^{\frac{e}{2}} dP = \frac{B^2_0}{\rho} \omega^2 l a \int_0^{\frac{e}{2}} x^2 dx = \frac{B^2_0}{\rho} \omega^2 l a \frac{e^3}{24} \qquad (\text{donde } \omega = 2\pi f)$$

Vemos que estas pérdidas son proporcionales:

1.° *Al cuadrado de la inducción máxima.*
2.° *A la longitud y anchura de las láminas.*
3.° *Al cuadrado de la frecuencia.*
4.° *Al cubo del espesor.*
5.° *Varían inversamente con* ρ.

Por esto, en los circuitos de alta frecuencia de radio, se utilizan láminas muy finas, o mejor incluso, de polvo fino de hierro, aglomerado con un barniz aislante, y comprimido en caliente: Las corrientes de FOUCAULT no pueden producirse, ya que cada partícula de hierro está rodeada por un aislante.

17. Encontrar la ley de desplazamiento de una barra de metal que se desliza sobre unos raíles, colocados en un campo magnético perpendicular, para que la corriente inducida sea constante.

Supongamos que los dos raíles están conectados en una de las extremidades, y que todos los conductores tienen la misma resistencia r por unidad de longitud. Despreciaremos la resistencia de contacto y la autoinducción del circuito.

Llamaremos l a la separación entre los dos raíles y se supone que, inicialmente, la barra CD está colocada en el origen AB (fig. 29).

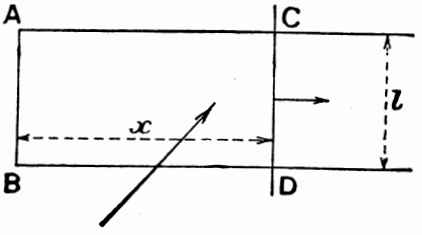

FIG. 29

— Coloquémonos a la distancia x del origen AB. La ley de desplazamiento de la barra es la función:

$$x = f(t)$$

donde t es el tiempo.

Como el campo de inducción B es perpendicular al plano de la

figura, existe un flujo captado en cada instante. Este flujo varía y se produce una f.e.m. que originará una corriente. Se pide que la intensidad I permanezca constante.

— En un instante dado, el flujo captado es (sin precisar las unidades):

$$\Phi = BS = Blx,$$

y la f.e.m. inducida en el circuito es:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt}.$$

Llamando R a la resistencia del circuito, la corriente será:

$$I = \frac{e}{R} = \frac{-Bl}{2r(l+x)}\frac{dx}{dt} = \text{Constante}.$$

Separemos las variables:

$$\frac{dx}{l+x} = -\frac{2rI}{Bl}dt.$$

Integremos, teniendo en cuenta que, en el instante en que nos colocamos, t ha variado desde 0 hasta t, y x ha variado desde 0 hasta x:

$$\int_0^x \frac{dx}{l+x} = -\frac{2rI}{Bl}\int_0^t dt$$

o bien:

$$[\text{Log}\,(l+x)]_0^x = -\frac{2rI}{Bl}\cdot t$$

$$\text{Log}\,\frac{l+x}{l} = -\frac{2rIt}{Bl} = -K\cdot t$$

$$\frac{l+x}{l} = e^{-Kt}$$

de donde:

$$x = l\,(e^{-Kt} - 1) = f(t),$$

y la velocidad v se obtendrá derivando:

$$v = \frac{dx}{dt} = -Kle^{-Kt}$$

que es una exponencial decreciente.

18. Calcular el tiempo que tarda un depósito en vaciarse. — *Tenemos un depósito cilíndrico de radio* $R = 2$ *m y de altura* $H = 3$ *m. Sabiendo que la velocidad* v *de salida en el tubo colocado en la base es, en cada instante, directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura de agua, calcular el tiempo necesario para que el depósito se vacíe, y sabiendo que el gasto es 2 litros por segundo en el momento en que la altura es 1 metro.*

— Llamando x a la altura del agua en un instante cualquiera, podemos escribir la velocidad instantánea del agua en la salida (en litros por segundo):

$$v = 2\sqrt{x} \qquad \begin{pmatrix}\text{para } x = 1\\ v = 2\end{pmatrix}$$

o bien:

$$v = 2\sqrt{x}\,10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}.$$

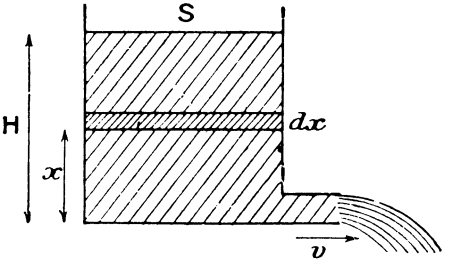

FIG. 30

Coloquémonos por tanto en un instante dado, al cabo de un tiempo t de la apertura del grifo. En este instante, el nivel del agua ha bajado, siendo x la altura y v la velocidad de salida del agua.

Durante el tiempo dt, el nivel del agua bajará dx y el volumen de agua correspondiente a esta rebanada será, siendo S la sección:

$$dV = S \cdot dx = \pi R^2 \cdot dx = 4\pi\, dx \text{ (en m}^3) = 4.000\,\pi\, dx \text{ (en litros)}.$$

Este volumen de agua ha salido por el tubo durante el tiempo dt. Como la velocidad de salida v es el espacio recorrido por segundo, $v \cdot dt$ representará el volumen de agua que ha salido (en realidad v viene expresada en m³ por segundo), y tendremos:

$$dV = 4.000\,\pi\, dx = v\, dt$$

de donde:

$$dt = \frac{4.000\,\pi\, dx}{v} = \frac{4.000\,\pi\, dx}{2\sqrt{x}}$$

y el tiempo total de vaciado del depósito será:

$$t = 2\pi\, 10^3 \int_H^0 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\pi \cdot 2[\sqrt{x}]_H^0\, 10^3$$

y prescindiendo del signo, tendremos:

$$t = 4x\sqrt{H}\, 10^3 = 4.000\,\pi\sqrt{3} = 21.765 \text{ segundos},$$
$$= 6 \text{ h } 2 \text{ mn } 45 \text{ s}.$$

19. Calcular la intensidad del campo magnético producido a distancia por una antena de radio.

Supongamos una antena-doblete en la cual existen oscilaciones de alta frecuencia. Se demuestra en radio que un elemento dx conductor, en el cual la corriente es i en un instante cualquiera, produce a gran distancia y en una dirección perpendicular, un campo magnético cuyo valor es:

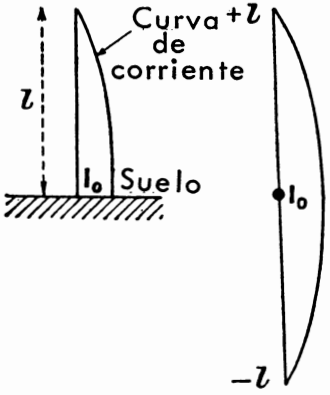

FIG. 31

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{i\, dx}{\lambda \cdot r}$$

donde λ es la longitud de onda y r la distancia.

— Supongamos ahora una antena vertical, unida al suelo y oscilando en cuarto de onda, es decir, en la cual la altura l es igual a $\frac{\lambda}{4}$ (fig. 31). Sabemos que, en este caso, tenemos un máximo de corriente en la base, mientras que la corriente en el vértice de la antena es nula, y se demuestra que la amplitud máxima I de la corriente a una distancia x del vértice, viene dada por la fórmula:

$$I = I_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (I_0 = \text{corriente máxima en la base}) \ (*)$$

Para tener el campo total a la distancia r, basta integrar desde $-l$ hasta $+l$, ya que la radiación es la misma que la de una antena de longitud $2l$, o doblete sin tierra. Es decir, que el campo a distancia es el mismo que si la antena y su «*imagen*», radiaran simultáneamente.

(*) Esta fórmula se demuestra en el Tomo III de la obra del mismo autor: *Teoría y práctica de los circuitos electrónicos.*

Integremos desde 0 hasta l y multipliquemos por 2:

$$B = \frac{\mu_0}{2\lambda r} \cdot 2 \int_0^l I_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot dx,$$

pero $\lambda = 4l$, lo cual nos da:

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{\lambda r} \int_0^l \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2l} \cdot dx = \frac{\mu_0 I_0}{\lambda r} \cdot \frac{2l}{\pi} \left[-\cos \frac{\pi x}{2l} \right]_0^l =$$

$$= -\frac{2\mu_0 I_0 l}{4lr} \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right] = \frac{\mu_0 I_0}{2r}.$$

Este resultado es independiente de l, y esta fórmula de B es análoga a la ley de BIOT y SAVART del campo de inducción creado por una corriente continua rectilínea.

— Podemos por tanto escribir:

$$B = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{\mu_0 I_0}{4r} \cdot \frac{2l}{\pi}$$

lo cual nos hace aparecer la altura efectiva h_e de la antena, que definiremos y calcularemos en el ejemplo siguiente:

$$h_e = \frac{2l}{\pi}$$ (para una antena de cuarto de onda

de donde:

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{\lambda r} h_e.$$

Que nos indica (fenómeno notable), que este campo varía inversamente con la distancia y con la longitud de onda λ. Esta es la explicación matemática, por la cual, las ondas cortas se propagan a gran distancia, independientemente de los fenómenos ionosféricos de reflexión y propagación.

20. Calcular la altura efectiva de una antena de radio. — La radiación a distancia de una antena emisora de radio (que depende de su altura, de su forma, del número de elementos, y de todo lo que existe en el espacio próximo a ella) viene expresada por una magnitud que se llama altura efectiva de esta antena.

— Antes de calcular su valor en un caso particular, por medio de la fórmula general que vamos a dar, es necesario explicar *claramente*, lo que es la altura efectiva.

Para precisar y simplificar, supongamos una antena vertical de longitud l unida al suelo en su base. Sabemos que, en una antena

de este tipo, como en toda antena, cualquiera que sea su forma, la intensidad de la corriente no es constante a lo largo del hilo de la antena; varía según una cierta ley, ya que la capacidad eléctrica de la antena no está repartida uniformemente. En efecto, un metro de hilo en la base de la antena no tiene la misma capacidad respecto al suelo que un metro de hilo en la mitad de la antena o en el extremo de ella.

Definición. — *Se llama altura efectiva h, de una antena cualquiera, a la altura de una antena vertical que daría a distancia la misma radiación electromagnética y en la cual, la intensidad de corriente* I_0 *sería constante en toda la antena, y la capacidad* C_0 *de antena estaría concentrada (sería puntual) en el vértice y a una altura h, en lugar de estar repartida a lo largo de la antena.*

I_0 es la corriente en la base de la antena, cuya altura efectiva queremos calcular.

A la distancia x del vértice, tenemos una corriente variable, cuyo valor instantáneo viene dado por una función que será conocida en general:

$$I = f(x) = I_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda},$$

y hemos visto en el ejemplo anterior, que el campo magnético producido a distancia por toda la antena es:

$$B = \frac{\mu_0}{2\lambda r} \int_0^{2l} i \, dx.$$

— Consideremos ahora la antena vertical de altura h, en la que la corriente sería constante e igual a I_0, y en la que toda la capacidad C_0 estaría concentrada en el vértice. Esta antena de altura h produciría a distancia un campo:

$$B = \frac{\mu_0 I_0 h}{\lambda r},$$

en efecto, no debemos olvidar que la radiación a distancia, producida por una antena unida al suelo, es la misma que la que produciría *un doblete*, es decir una antena de longitud doble, *no unida al suelo* (fig. 32).

Si trazamos una curva a lo largo de la antena, indicando la distribución de corriente en la antena, por ejemplo I_0 máxima en la base y nula en el vértice, y tal que la distancia horizontal de un punto de la curva a la antena sea igual a la corriente en este punto (por ejemplo i a la distancia x del vértice), vemos que $\int_0^{2l} i \cdot dx$

representa la superficie total comprendida entre la antena y la curva. Por tanto, resulta que la altura h efectiva es la altura de un rec-

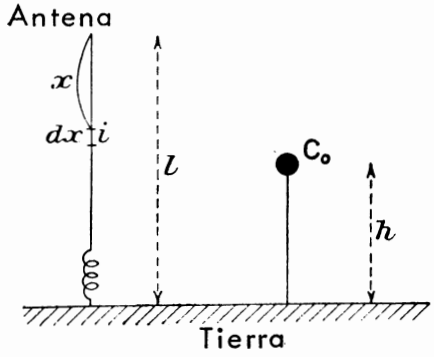

FIG. 32

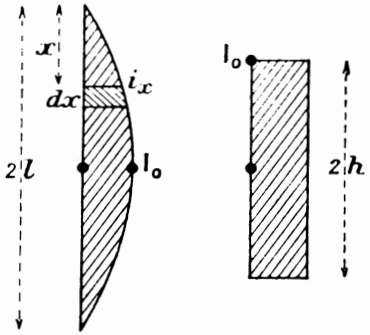

FIG. 33

tángulo de anchura I_0, en el cual la superficie $2hI_0$, es igual a la anterior (fig. 33), que se expresa con la igualdad:

$$\int_0^l I\,dx = hI_0,$$

de donde:

$$h = \frac{1}{I_0}\int_0^l I\,dx,$$

fórmula que permite calcular h.

Ejemplo. — Supongamos una antena clásica oscilando en cuarto de onda, en la que $I = I_0$ en la base, e $I = 0$ en el vértice, tal que:

$$l = \frac{\lambda}{4}$$

y en la que la distribución de corriente es sinusoidal.

En radio, se demuestra que el valor máximo, en cada punto, de la corriente I es, llamando x a la distancia del punto considerado al extremo libre de la antena:

$$I = I_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda}$$

y, si $\lambda = 4l$, tenemos:

$$I = I_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2l}.$$

Por tanto:

$$h = \frac{1}{I_0}\int_0^l I_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2l}\,dx = -\frac{2l}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{2l}\right]_0^l = -\frac{2l}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right]$$

o bien:

$$\boxed{h = \frac{2l}{\pi}}$$

Debemos señalar que el valor de h depende del modo de vibración de la antena, y que no es la misma si la antena vibra con la onda fundamental o con un armónico cualquiera.

21. Cálculo del trabajo mecánico realizado durante un movimiento de rotación.—Supongamos un cuerpo animado de un movimiento de rotación y sometido a una fuerza constante F que suponemos tangencial, aplicada en un punto P de su periferia, siendo R el radio (fig. 34).

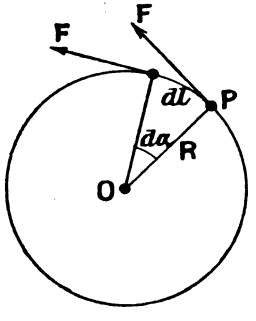

FIG. 34

Durante un tiempo dt, el punto P se desplaza, describiendo un pequeño arco de círculo de longitud dl:

$$dl = R\,d\alpha.$$

El trabajo realizado será (ya que F es constantemente tangente al camino recorrido):

$$dW = F \cdot dl = F \cdot R\,d\alpha,$$

y en una vuelta será:

$$W = \int_0^{2\pi} FR\,d\alpha = FR[\alpha]_0^{2\pi} = 2\pi RF.$$

Si N es el número de vueltas por minuto, la potencia será:

$$P = 2\pi RF \cdot \frac{N}{60};$$

si F se expresa en newtons y R en metros, P vendrá expresada en vatios.

Observaremos que el producto R·F es el *momento* de la fuerza F respecto al centro, y en la práctica este momento se llama *par*, y se le denomina habitualmente C. Por otra parte, $2\pi\frac{N}{60}$ representa el ángulo descrito por segundo, esto es la velocidad angular ω, de don-

de se deduce la fórmula fundamental de la mecánica y de todos los motores:

$$\boxed{P = C\,\omega}$$

22. Calcular el trabajo necesario para estirar un resorte. —*Un resorte helicoidal sometido a un esfuerzo de* 30 N, *sufre un alargamiento de* 1 *mm. Calcular el trabajo necesario para producir un alargamiento de* 20 *mm, sabiendo que la fuerza es, en todo momento, proporcional al desplazamiento.*

Si llamamos l al alargamiento, el trabajo total no es $W = Fl$, ya que la fuerza varía en cada instante. Coloquémonos a la distancia x del origen. En este momento la fuerza de tracción es:

$$F = Kx.$$

Demos a x un incremento dx. Durante el desplazamiento dx el trabajo será:

$$dW = F \cdot dx = Kx\,dx.$$

Utiilzando el sistema *SI*:

$$x = 0{,}001 \text{ m}, \qquad F = 30 \text{ N},$$

de donde:

$$30 = K \cdot 0{,}001 \qquad y \qquad K = 30.000.$$

Integrando desde 0 hasta l tendremos el trabajo total (siendo $l = 0{,}02$ m):

$$W = \int_0^l 30.000\,x\,dx = \frac{30.000}{2}\,[x^2]_0^{0{,}02} = 15.000\left(\frac{2}{100}\right)^2 = 6 \text{ J}.$$

23. Cálculo del trabajo necesario para comprimir un gas perfecto. —Supongamos que el gas cumple la ley de MARIOTTE y que la temperatura permanece constante (*compresión isotérmica*):

$$p \cdot v = c^{te} = p_1 v_1 = p_2 v_2 = K$$

donde p es la presión y v el volumen.

Tomemos un cilindro de superficie S y un pistón que se desplace dx. Como la fuerza total es Sp, el trabajo de compresión es, para un desplazamiento dx:

$$dW = F \cdot dx = Sp\,dx = p \cdot dv = K\frac{dv}{v}.$$

El trabajo total para hacer variar el volumen desde v_1 hasta v_2, será, por tanto:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} K\frac{dv}{v} = K \cdot [\text{Log } v]_{v_1}^{v_2} = K \text{ Log } \frac{v_2}{v_1} = K \text{ Log } \frac{p_1}{p_2}.$$

— En el caso de la *compresión adiabática* de un gas perfecto, o de vapor de agua saturante, la ley que relaciona p y v será:

$$p \cdot v^n = K$$

y el cálculo de W se haría del mismo modo. El lector deducirá la fórmula clásica de la termodinámica:

$$W = \frac{p_1v_1 - p_2v_2}{n-1}.$$

Ejemplo. — *Un depósito tiene una capacidad de* 200 *litros y contiene aire a una presión de* 100 *barias. Efectuamos una expansión a temperatura constante, hasta la presión de una baria, en una máquina sin rozamientos. Calcular:*

1.° *El trabajo suministrado por esta expansión.*

2.° *Durante cuánto tiempo podrá alimentar un motor que consume una potencia de* 1.500 *vatios.*

— La fórmula dada anteriormente para la compresión es también válida para la expansión:

$$dW = p \cdot dv.$$

Tenemos: $pv = p_0v_0$ y $p\,dv = -v\,dp$,

de donde:

$$W = -\int v\,dp = -p_0v_0 \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = p_0v_0 \text{ Log } \frac{p_0}{p_1} = p_0v_0 \text{ Log } 100.$$

En el sistema *SI*:

$$p_0 = 100 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad \text{y} \quad v_0 = 0{,}2 \text{ m}^3,$$

de donde:

$$W = 10^7 \times 0{,}2 \times 2{,}3 \log_{10} 100 = 9{,}2 \times 10^6 \text{ julios.}$$

El motor consume 1.500 vatios, es decir, 1.500 julios/seg, y la expansión anterior podrá alimentarlo durante:

$$\frac{9{,}2 \times 10^6}{1.500} = 6.130 \text{ segundos, o sea durante unas 2 horas.}$$

24. Calcular el perfil de un sólido con igual resistencia a la tracción (y a la compresión). —Se llama *sólido de igual resistencia,* a un sólido tal que cada milímetro cuadrado de materia está sometido al mismo esfuerzo, cualquiera que sea la sección elegida.

Por ejemplo, en el cable de una mina o de un ascensor; cuando el cable está desenrollado, el metal de la parte alta del cable sufre un esfuerzo mucho mayor que en su parte media, y, sobre todo, mucho mayor que el de la extremidad inferior, donde está sujeto a la cabina del ascensor, *debido al peso del cable.* Se comprende que, para un metal que trabaje a la tracción, la sección del cable o del sólido que soporta un peso, debe aumentarse cuando nos movemos de abajo hacia arriba.

—Calculemos la ecuación de la curva que representa el perfil de este sólido, para que cada milímetro cuadrado de la sección de este sólido esté sometido a un esfuerzo constante, cualquiera que sea el lugar en que se considere esta sección (fig. 35).

Sea P el peso que hay que soportar, y llamemos a al peso por unidad de volumen del metal. Supongamos un sólido de revolución y expresemos todo en decanewtons y en milímetros cuadrados.

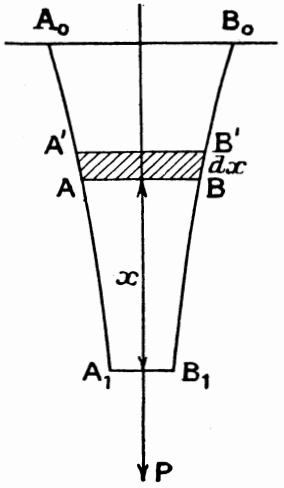

FIG. 35

Consideremos una sección S del sólido a una distancia x de la base A_1B_1, y demos a x un incremento dx. El peso de la rebanada dx (suponiéndola cilíndrica) será:

$$dp = a \cdot dV = a \cdot S\,dx.$$

El esfuerzo por milímetro cuadrado en la sección AB será:

$$\frac{P + a \cdot \text{volumen } ABA_1B_1}{S}.$$

Llamando R al coeficiente de trabajo del metal, es decir, al esfuerzo (en decanewtons/mm²) a que debe estar sometido, tendremos:

$$\frac{P + a \cdot \text{volumen } ABA_1B_1}{S} = R.$$

Diferenciando:

$$a \cdot d(\text{volumen } ABA_1B_1) = R \cdot dS$$

o sea:

$$a \cdot dV = R \cdot dS$$

$$a \cdot S\,dx = R \cdot dS$$

de donde:

$$\frac{dS}{S} = \frac{a}{R}\,dx.$$

Integrando:

$$\int \frac{dS}{S} = \int \frac{a}{R}\,dx + \text{Log K}$$

$$\text{Log S} = \frac{a}{R}x + \text{Log K}, \qquad (1)$$

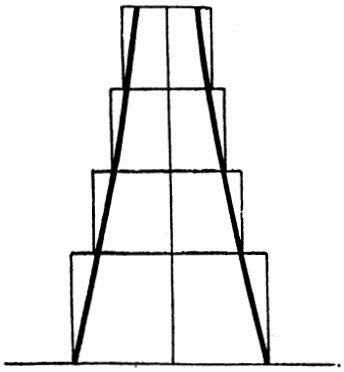

FIG. 36

pero, para:

$x = 0$ tenemos $S = S_0$,

por tanto:

$$\text{Log } S_0 = \text{Log K}.$$

Sustituyendo en (1), tenemos:

$$\text{Log S} = \frac{R}{a}x + \text{Log } S_0$$

de donde:

$$\text{Log}\frac{S}{S_0} = \frac{a}{R}x$$

y

$$S = S_0 \cdot e^{\frac{a}{R}x}$$

es, por tanto, un perfil exponencial.

La sección S_0 viene determinada por el valor del esfuerzo a que debe trabajar el metal:

$$\frac{P}{S_0} = R \qquad \text{(en decanewtons/mm}^2\text{)}$$

— Evidentemente, tendríamos el mismo perfil en el caso de un sólido de igual resistencia a la compresión. Pero, si por razones prácticas no conviene dar un perfil exponencial, se le dará la forma en escalera indicada en la figura 36.

25. Calcular la disminución Δl de la longitud de una barra vertical homogénea, de sección constante S, apoyada en el suelo, bajo el efecto de compresión debido a su peso P (fig. 37).

Conocemos la fórmula fundamental de la resistencia de materiales: Sea una barra cualquiera de metal, de sección S, sometida a un esfuerzo F de tracción o de compresión; el esfuerzo por milímetro cuadrado es:

$$n = \frac{F}{S}.$$

Si l es la longitud y Δl la variación de la longitud, el alargamiento o la compresión unitaria, es decir, por unidad de longitud, será:

$$i = \frac{\Delta l}{l}.$$

La ley de HOOKE dice, que el esfuerzo unitario n es proporcional a i (mientras no se sobrepase el límite de elasticidad):

$$n = \mathrm{E} \cdot i$$

donde E es el coeficiente de elasticidad. ($\mathrm{E} = n$ para $i = 1$).

— Sea una barra vertical, o una columna, de altura l, apoyada en el suelo. Un elemento dx *situado* a la distancia x del vértice está sometido a una fuerza (llamando δ a la densidad):

$$\mathrm{F} = \delta \cdot \text{Volumen} = \delta \cdot \mathrm{S}x$$

de donde:

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{S}} = n = \delta \cdot x,$$

y el acortamiento *unitario* del elemento dx será:

$$i = \frac{n}{\mathrm{E}} = \frac{\delta \cdot x}{\mathrm{E}}.$$

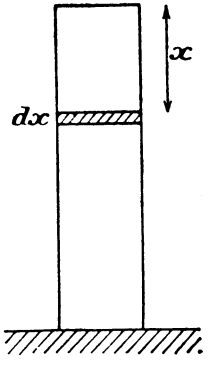

FIG. 37

La altura del elemento dx será:

$$dx - \frac{\delta \cdot x}{\mathrm{E}} \cdot dx = dx \left(1 - \frac{\delta \cdot x}{\mathrm{E}}\right)$$

y la altura total l' de la columna será la suma de todos estos elementos:

$$l' = \int_0^{l} \left(1 - \frac{\delta \cdot x}{\mathrm{E}}\right) dx = l - \frac{\delta \cdot l^2}{2\mathrm{E}} = l - \frac{\delta \cdot \mathrm{S}l \cdot l}{2\mathrm{ES}} = l - \frac{\mathrm{P}l}{2\mathrm{ES}}.$$

la disminución de la altura es:

$$l - l' = \Delta l = \frac{\mathrm{P}l}{2\mathrm{ES}}.$$

Observación. — En el tomo V (*Ecuaciones diferenciales*) estudiaremos la flexión de las vigas y calcularemos sus flechas.

26. Planteamiento del teorema fundamental de la mecánica sobre los cuerpos en rotación.

Sabemos que una masa pesante $m = \frac{P}{g}$, animada de una velocidad v en un instante dado, posee una energía cinética igual a:

$$W = \frac{1}{2} mv^2$$

y, si la velocidad varía desde v_1 hasta v_2, la energía cinética variará en:

$$\Delta W = W_{final} - W_{inicial} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

Esta expresión es una variación de energía, es decir, que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo han realizado un cierto trabajo, y en virtud del principio de conservación de la energía, se comprende que los trabajos realizados por *todas* las fuerzas que actúan sobre un cuerpo sean iguales a la variación de energía cinética de dicho cuerpo.

— Todo esto constituye el objeto del teorema de la energía cinética en mecánica, pero como en realidad un cuerpo puede estar sometido a fuerzas motrices y resistentes, es más exacto dar al enunciado de este teorema de la energía cinética, la forma siguiente:

Teorema. — «*La variación de la energía cinética de un cuerpo en movimiento es igual a la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas, interiores o exteriores, que actúan sobre dicho cuerpo.*»

Por ejemplo, si todas las fuerzas *suministran* trabajo al cuerpo, es decir, le *aportan* energía, es evidente que la velocidad del cuerpo deberá aumentar.

— Para un cuerpo en rotación alrededor de un eje, llamando ω a la velocidad angular e I al momento de inercia respecto al eje, ya dijimos al principio del capítulo de los momentos de inercia, que la energía cinética de este cuerpo es:

$$W = \frac{1}{2} \omega^2 I.$$

Si ω varía desde ω_1 hasta ω_2, la variación de la energía cinética será:

$$\Delta W = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

y, si ω varía en $d\omega$, tendremos:

$$dW = \frac{1}{2} I d(\omega^2).$$

El teorema anterior, que expresa una evidencia mecánica, ya que la energía se conserva, nos da, por tanto:

$$\frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \sum \text{ de los trabajos de las fuerzas}$$

— Apliquemos ahora esta fórmula para establecer el teorema célebre y fundamental de los cuerpos en rotación, y que da la aceleración angular $\frac{d\omega}{dt}$ del cuerpo en rotación, en función del momento de inercia y de las fuerzas que actúan. Este teorema se aplica tanto a un obús que choca contra una chapa blindada, como a un volante, o al inducido de una dínamo, o al inductor de un alternador, o al cuadro móvil de un voltímetro o amperímetro; se aplica a todos los cuerpos en rotación.

En primer lugar, enunciaremos este teorema, después lo demostraremos y finalmente haremos una aplicación numérica.

Teorema fundamental de los cuerpos en rotación. — *La aceleración angular* $\frac{d\omega}{dt}$ *de un cuerpo que gira alrededor de un eje, es, en cada instante, igual a la suma algebraica de los momentos de las fuerzas exteriores respecto a dicho eje, dividida por el momento de inercia del cuerpo respecto a este mismo eje*

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum \text{ de los momentos de las fuerzas}}{I}$$

Pero si llamamos α al ángulo de rotación en un instante cualquiera, tenemos:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

y deducimos:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\sum \text{ de los momentos de las fuerzas}}{I}$$

Demostración. — Supongamos un cuerpo que parta con una velocidad angular inicial ω_0. Al cabo de un cierto tiempo, dicha velocidad

se convertirá en ω y tendremos, según el teorema de las fuerzas vivas:

$$\frac{I}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \int \text{de los trabajos de las fuerzas} = \int\left(\sum \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{x}\right)$$

Diferenciando en los dos miembros (ω_0 es una constante):

$$\frac{I}{2} 2\omega\, d\omega - 0 = d\int\left(\sum \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{x}\right)$$

o bien:

$$I\omega\, d\omega = \sum (\mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{x}).$$

— Tomemos ahora una fuerza aislada F; su trabajo elemental durante una rotación $d\alpha$ es, suponiendo, para simplificar, que la fuerza es tangencial y que su punto de aplicación se encuentra a una distancia r del eje:

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{x} = \mathbf{F}\cdot(r\,d\alpha) = (\text{Momento de } \mathbf{F})\cdot d\alpha,$$

y para el conjunto de todas las fuerzas:

$\sum$ de los trabajos $= \sum$(Momentos de $\mathbf{F}\cdot d\alpha$)$= d\alpha\cdot\sum$ de los momentos de las fuerzas, pues, en efecto, $d\alpha$ es igual para todos los puntos del cuerpo.

Se tendrá, por tanto:

$$I\omega\, d\omega = d\alpha\cdot \sum \text{Momentos de las fuerzas},$$

pero:

$$d\alpha = \omega\cdot dt$$

lo que nos da:

$$I\omega\, d\omega = \omega\, dt\cdot \sum \text{Momentos de las fuerzas}$$

de donde:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum \text{Momentos de las fuerzas}}{I} \qquad \text{c.q.d.}$$

— Daremos aplicaciones prácticas de este teorema en el Tomo V, como ejemplos de resolución de ecuaciones diferenciales. Se obtiene, en efecto, una ecuación diferencial, ya que lo que se busca es la ley que da el ángulo α de rotación en función del tiempo:

$$\alpha = f(t),$$

pero, el teorema anterior nos da $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$: integrando dos veces, tendremos el ángulo α.

27. Aplicación numérica.—*Tenemos una muela de afilar de* 2,50 *m de diámetro y* 0,40 *m de espesor, girando a* 32 *vueltas por minuto. Para mantener su movimiento, hace falta una fuerza de* 400 N *actuando tangencialmente en la periferia de una polea de* 0,80 *m de diámetro. ¿Cuántas vueltas dará la muela si se suprime la fuerza tangencial? La masa por unidad de volumen es* 2.100 Kg/m³.

En marcha normal, la fuerza de 400 N entretiene el movimiento, hay por tanto equilibrio, y el momento de las fuerzas resistentes producidas por el objeto que se afila es igual al momento de la fuerza motriz:

Momento de las fuerzas resistentes = 400 N · 0,40 m.

El teorema anterior nos da, llamando ω a la velocidad angular:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M}{I}$$

$$d\omega = -\frac{M}{I} \cdot dt,$$

integrando:

$$\omega = \int -\frac{M}{I}\, dt + C = -\frac{M}{I} \cdot t + C.$$

Pero, para:

$$t = 0 \qquad \omega_0 = 2\pi \frac{N}{60},$$

de donde:

$$2\pi \frac{N}{60} = -\frac{M}{I} \cdot 0 + C \qquad \text{y} \qquad C = \frac{\pi N}{30}.$$

Sustituyamos en la ecuación de ω:

$$\omega = -\frac{M}{I} \cdot t + \pi \frac{N}{30}. \tag{1}$$

Cuando la rueda se para $\omega = 0$, y si t_1 es el tiempo que ha tardado en pararse, tendremos:

$$0 = -\frac{M}{I} \cdot t_1 + \pi \frac{N}{30} \qquad \text{de donde} \qquad t_1 = \pi \frac{N}{30} \cdot \frac{I}{M}.$$

— Calculemos ahora el momento de inercia I de la muela respecto a su eje.

Llamando m a la masa de la muela y aplicando la fórmula del párrafo 5:

$$I = \frac{mr^2}{2} = \frac{(\delta \cdot \pi r^2 l) r^2}{2}, \quad (l = \text{anchura de la muela})$$

por otra parte, el momento es:

$$M = F \cdot r' = 400 \cdot 0{,}4$$

Tendremos, por tanto:

$$t_1 = \frac{\pi N}{30} \cdot \frac{\pi r^4 l \delta}{2F \cdot r'} = \pi^2 \cdot \frac{32 \cdot \overline{1{,}25}^4 \cdot 0{,}4 \cdot 2.100}{2 \cdot 30 \cdot 400 \cdot 0{,}4} = 68 \text{ seg. aprox.}$$

— Calculemos el número de vueltas realizadas:

La ecuación (1) puede escribirse (ya que $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, donde θ es el ángulo de rotación):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi N}{30} - \frac{M}{I} \cdot t$$

$$d\theta = \frac{\pi N}{30} dt - \frac{M}{I} t\, dt.$$

Integremos:

$$\theta = \int \frac{\pi N}{30} dt - \int \frac{M}{I} t\, dt + C = \frac{\pi N}{30} t - \frac{M}{I} \frac{t^2}{2} + C.$$

Pero θ es nulo en el momento de partida, es decir, para $t = 0$ tenemos $C = 0$, y nos queda:

$$\theta = t \left(\frac{\pi N}{30} - \frac{M}{I} \cdot \frac{t}{2} \right),$$

y para obtener el ángulo total θ descrito hasta el momento en que la muela se detiene, sustituyamos t por t_1 y en el paréntesis t_1 por su valor $\frac{\pi N}{30} \cdot \frac{I}{M}$:

$$\theta = t_1 \left(\frac{\pi N}{30} - \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi N}{30} \cdot \frac{1}{M} \right) = \frac{\pi N t_1}{60}.$$

Finalmente, para obtener el número de vueltas, basta dividir por 2π, es decir:

$$\text{Número de vueltas} = \frac{\pi N t_1}{2\pi 60} = \frac{N t_1}{120} = \frac{32}{120} \cdot 68 = 18 \text{ vueltas.}$$

28. Problema electromecánico del disco de Faraday. — *Un disco de cobre, de radio r y cuyo momento de inercia es* I, *gira alrededor de su eje en un campo de inducción* B, *perpendicular al disco. Dos escobillas hacen contacto sin rozamiento, la una en la periferia del disco y la otra en su eje. Cuando el disco está animado por una velocidad angular* ω_0, *se conectan las dos escobillas a una resistencia eléctrica* R. *Se produce una corriente eléctrica que frena el disco* (fig. 38).

Se pide encontrar cómo varía la velocidad angular ω *en función del tiempo.*

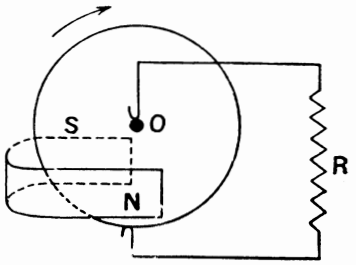

FIG. 38

— Situémonos en un instante, al cabo de un tiempo t de conectar la resistencia R. En este momento la velocidad angular es ω. Durante un tiempo dt, aparecerá en R una energía:

$$dW = Ri^2dt,$$

y esta energía es suministrada por la variación de la energía cinética del disco:

$$dW = d\left(\frac{1}{2}\omega^2 I\right) = -\frac{1}{2} I \cdot 2\omega\, d\omega = -I\omega\, d\omega.$$

(Como W disminuye, dW es negativo.)

— Calculemos el valor de la corriente i, producida por la fuerza electromotriz inducida en el disco, ya que un radio cualquiera r corta las líneas de fuerza.

Durante el tiempo dt, el disco ha girado un ángulo $d\theta$, y el radio r ha barrido la superficie de un pequeño sector:

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

el flujo magnético cortado es:

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{Br^2 d\theta}{2},$$

y la f.e.m. inducida es, en valor absoluto:

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{Br^2}{2}\frac{d\theta}{dt} = \frac{Br^2}{2}\omega,$$

de donde:

$$i = \frac{e}{R}.$$

Igualando las dos energías, tendremos:

$$Ri^2dt = -I\omega\, d\omega$$

$$R\,\frac{B^2r^4\omega^2}{4R^2}\,dt = -I\omega\, d\omega$$

o bien, llamando m a la masa del disco $\left(I = \frac{mr^2}{2}\right)$:

$$\frac{1}{4}\,\frac{r^4\omega^2B^2}{R}\,dt = -\frac{mr^2}{2}\cdot\omega\, d\omega$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{2}\,\frac{r^2B^2}{mR}\,dt.$$

Integrando:

$$\int\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{2}\,\frac{r^2B^2}{mR}\int dt + \operatorname{Log} C$$

$$\operatorname{Log}\frac{\omega}{C} = -\frac{1}{2}\,\frac{r^2B^2}{mR}\cdot t = -\alpha\cdot t$$

de donde:

$$\omega = Ce^{-\alpha t}$$

pero como para:

$$t = 0, \quad \omega = \omega_0, \quad \text{tenemos} \quad \omega_0 = C,$$

de donde:

$$\omega = \omega_0\cdot e^{-\alpha t},$$

la velocidad angular decrece exponencialmente.

29. Calcular el empuje hidráulico sobre una superficie. — Consideremos una puerta de esclusa, plana y rectangular, de altura H y de anchura l. Cuando el agua baña enteramente una sola de sus caras, se ejerce una fuerza total F sobre dicha puerta, debido a la presión del agua. Calculemos su valor.

— Sabemos que la presión que existe en un líquido a una profundidad x es igual al peso de una columna de líquido de sección unidad y de altura x. Esta presión se ejerce en todas las direcciones, y vale $\rho g x$, siendo ρ la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad.

Como la presión varía con la profundidad, coloquémonos a una distancia x de la superficie (fig. 39) y sea $x + dx$ una profundidad infinitamente próxima.

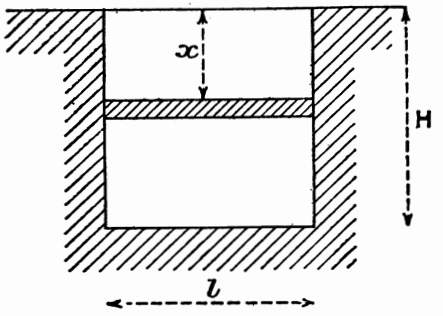

FIG. 39

La fuerza F que se ejerce sobre la rebanada dx es, siendo p la presión y dS la superficie:

$$dF = p \cdot dS = \rho g\, lx\, dx$$

y la fuerza total sobre la puerta de la esclusa será:

$$F = \int_0^H \rho g\, lx\, dx = \rho g l \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^H = \frac{\rho g l H^2}{2}.$$

Si expresamos l y H en metros y tomamos $g \approx 10\text{m/seg}^2$, $\rho = 1.000\ \text{Kg/m}^3$ para el agua, tendremos: $F = 5.000\ lH^2$ newtons.

Aplicación. — Tomemos un tubo horizontal de una longitud cualquiera, cerrado en sus extremidades y lleno de agua hasta la mitad. Calcular la fuerza total que se ejerce sobre una de estas paredes verticales, si su diámetro es de 6 metros.

Representemos la sección de este tubo (fig. 40). Nos colocamos a una profundidad x, donde la presión es:

$$p = \rho\, gx.$$

Demos a x un incremento dx. La fuerza dF que se ejercerá sobre la rebanada dx es, llamando $2y$ a la anchura:

$$dF = p \cdot dS = \rho g x (2y\, dx).$$

Pero la ecuación que liga x e y es:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{de donde} \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

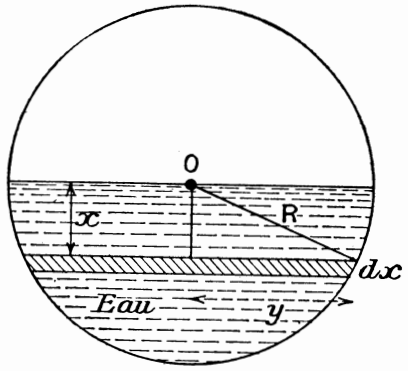

FIG. 40

Tendremos, por tanto:

$$\mathbf{F} = \int_0^R 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = -\rho g \int_0^R u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= -\rho g \left[\frac{2(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^R = -\frac{2}{3}\rho g[0 - R^3]$$

Suponiendo que $g = 10$ m/seg^2 y que $\rho = 1.000$ Kg/m^3, se encuentra:

$$F = \frac{2}{3} \times 10^4 \times 3^3 = 18 \times 10^4 \text{ newtons.}$$

Observaremos que este empuje es independiente de la longitud del tubo.

Nota final — En el Tomo V, daremos un gran número de aplicaciones de las integrales a la mecánica, electricidad, vibraciones, radio, etc., utilizando ecuaciones diferenciales.

CAPITULO III

DESARROLLOS EN SERIE DE FOURIER

El teorema de FOURIER tiene un gran número de aplicaciones en todos los campos de la técnica: Electricidad, Mecánica, Acústica, Optica, etc., y sus repercusiones son incontables. Por esto, le consagramos dos partes: Una parte a la teoría y al cálculo detallado de coeficientes, otra parte a la aplicación de los desarrollos en serie de FOURIER a algunas curvas interesantes. Haremos un estudio *detallado,* con objeto de mostrar al lector cómo se hacen los cálculos en cada caso particular.

El teorema de FOURIER nos dará, además, algunos resultados interesantes desde el punto de vista eléctrico y acústico.

30. Teorema de Fourier. — *Toda función periódica, no sinusoidal y continua en un intervalo de* 0 *hasta* 2π, *puede ser descompuesta en una suma infinita de funciones periódicas sinusoidales cuyas frecuencias son múltiplos exactos (una vez, dos veces, tres veces, etc.) de la frecuencia fundamental que es la más baja*

Estas frecuencias, salvo la frecuencia fundamental, se llaman *armónicos*: algunas frecuencias pueden aparecer o no, otras pueden ser más intensas que la fundamental; finalmente, todos estos armónicos pueden tener desfases entre ellos. Todo depende de la forma de la curva que hay que descomponer.

Es precisamente esta mezcla de armónicos, en cantidad y en intensidad variables, lo que en *Acústica* caracteriza el timbre de los sonidos.

Hoy día se ha conseguido hacer el análisis y síntesis de los sonidos, con objeto de poder reconstruir los diferentes timbres, por ejemplo en los órganos electrónicos. Esto demuestra, *a posteriori,* que la descomposición de una función periódica, no sinusoidal, en serie de FOURIER y la existencia de los armónicos no es una ficción matemática.

En contraposición con el lenguaje corriente, el *primer* armónico tiene una frecuencia *doble* de la fundamental, el segundo armónico tiene una frecuencia triple de la fundamental, etc. Sin embargo, cuando se habla del «*armónico dos*», todo el mundo entiende que se trata del armónico que tiene una frecuencia *doble* de la frecuencia fundamental, el armónico tres tendrá una frecuencia triple, etc., lo esencial es comprenderse bien.

— Sea una función periódica y continua en el intervalo de 0 hasta 2π, pero *no sinusoidal*, es decir que la forma de la curva es cualquiera, más o menos regular o en forma de dientes:

$$y = f(x).$$

El teorema de FOURIER dice que se puede escribir en la forma siguiente:

$$y = f(x) = A_0 + Y_1 \operatorname{sen}(x - \varphi_1) + Y_2 \operatorname{sen}(2x - \varphi_2) + Y_3 \operatorname{sen}(3x - \varphi_3) + \ldots + Y_n \operatorname{sen}(nx - \varphi_n) + \ldots,$$

donde A_0 es un término constante, $Y_1 Y_2 Y_3 \ldots Y_n$ son las amplitudes máximas de cada armónico, y donde $Y_1 \operatorname{sen}(x - \varphi_1)$ es el término fundamental. Los ángulos φ_1, φ_2, φ_3, ... φ_n son los desfases respectivos de estos armónicos.

Si la función es periódica en el tiempo, haremos $x = \omega t$, donde ω es la pulsación, igual a $\frac{2\pi}{T}$ y donde T es el período.

Pero, en geometría se demuestra la siguiente equivalencia:

$$A \operatorname{sen} x + B \cos x \equiv M \operatorname{sen}(x - \varphi) \left(\text{ donde } M = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ y } \operatorname{tg} \varphi = -\frac{B}{A} \right)$$

Inversamente, se podrá sustituir:

$$Y_1 \operatorname{sen}(x - \varphi_1) \quad \text{por} \quad A_1 \operatorname{sen} x + B_1 \cos x,$$

vemos, por tanto, que cada término de la serie inicial origina un término en seno y un término en coseno.

La serie de FOURIER puede escribirse en la forma siguiente más cómoda para estudiar:

$$y = A_0 + A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen} 2x + A_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots + A_n \operatorname{sen} nx + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \ldots + B_n \cos nx$$

— Tenemos ahora que calcular los tres tipos de coeficientes: A_0 A_n y B_n, en los cuales haremos sucesivamente:

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \text{etc.},$$

el cálculo de estos coeficientes justifica la descomposición anterior.

31. Cálculo del término constante A_0. — Multipliquemos todos los términos por dx e integremos desde 0 hasta 2π:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = A_0\int_0^{2\pi} dx + A_1\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$

$$+ A_2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2x\,dx + \ldots + A_n\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$+ B_1\int_0^{2\pi} \cos x\,dx + B_2\int_0^{2\pi} \cos 2x\,dx + \ldots + B_n\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx.$$

Pero, hemos visto en el Tomo III que la integral de un seno o de un coseno entre 0 y 2π, *es siempre nula, cualquiera que sea el ángulo*. Todas estas integrales son, por tanto, nulas, salvo la primera, y tenemos:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = A_0 \cdot 2\pi$$

de donde:

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx} \qquad (1)$$

Si conocemos la ecuación de la curva $y = f(x)$, podremos calcular fácilmente A_0.

Observaremos, de acuerdo con esta fórmula, que A_0 representa el *valor medio* de la función $y = f(x)$, como se ha definido en el Tomo III, cuando calculamos el valor medio de las funciones.

32. Cálculo del coeficiente A_n de la serie de los senos. — Multipliquemos todos los términos de la serie inicial por $\operatorname{sen} nx\,dx$ e integremos desde 0 hasta 2π:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = A_0\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\,dx + A_1\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$+ A_2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} nx\,dx + \ldots + A_n\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx$$

$$+ B_1\int_0^{2\pi} \cos x \cdot \operatorname{sen} nx\,dx + \ldots + B_n\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \operatorname{sen} nx\,dx.$$

Pero, todas estas integrales son nulas salvo $\int_0^{2\pi} A_n \operatorname{sen}^2 nx\,dx$.

— En efecto, la integral de A_0 es nula por la razón indicada anteriormente. En cuanto a las demás, debemos estudiarlas.

Tomemos una integral *cualquiera* de la serie de las A, por ejemplo:

$$\int_0^{2\pi} A_2 \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Sabemos que, para integrarla, se la transforma en una suma, ya que:

$$\cos (a + b) - \cos (a - b) = -2 \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b,$$

lo cual nos da:

$$\operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{2}[\cos (n + 2)x - \cos (n - 2)x],$$

y obtenemos, por tanto, dos integrales de coseno, *que serán nulas entre* 0 *y* 2π, *y esto cualquiera que sea el valor del ángulo.*

Tomemos una integral de la serie de las B, por ejemplo:

$$\int_0^{2\pi} \cos 2x \cdot \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Sabemos que:

$$\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b,$$

lo cual nos da:

$$\operatorname{sen} nx \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}[\operatorname{sen} (n + 2)x + \operatorname{sen} (n - 2)x],$$

obtenemos integrales de seno, que serán también nulas, cualquiera que sea el valor del ángulo. En cuanto a la última de la serie de las B, podemos escribir:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2nx \, dx = 0$$

Todas las integrales de la serie de las B son nulas, y nos queda solamente la última de la serie de las A:

$$A_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx = A_n \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2nx}{2}\right) dx$$

$$= A_n \left[\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2} - \frac{1}{4n}\int_0^{2\pi} \cos 2nx \cdot 2n \, dx\right]$$

$$= A_n [\pi - 0] = A_n \cdot \pi.$$

Deducimos:

$$\boxed{A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx} \qquad (2)$$

esta integral es relativamente fácil de calcular.

33. Cálculo del coeficiente B_n de la serie de los cosenos. —Multipliquemos todos los términos de la serie inicial por $\cos nx\,dx$, e integremos desde 0 hasta 2π:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = A_0\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx + A_1\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} x\cdot\cos nx\,dx + \ldots$$

$$+ A_n\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} nx\cdot\cos nx\,dx +$$

$$+ B_1\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\cos nx\,dx + \ldots + B_n\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx.$$

Pero, todas estas integrales son nulas, salvo la última en B_n.

— En efecto, la primera es nula por la razón indicada anteriormente. Tomemos una cualquiera de la serie de las A, por ejemplo:

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} 3x\cdot\cos nx\,dx$$

Pero, según hemos visto antes, el producto de un seno por un coseno origina una suma de dos senos, cuyas integrales desde 0 hasta 2π son nulas, cualquiera que sea el valor del ángulo. Por tanto, todas las integrales de la serie de las A son nulas, comprendida la integral de A_n, ya que es idéntica a la integral de B_n que se examinó antes.

Por la misma razón, las integrales de la serie B son nulas, salvo la última.

Nos queda, finalmente:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = B_n\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx$$

$$= B_n\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2nx}{2}\right)dx = B_n\left[\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2} + \frac{1}{4n}\int_0^{2\pi}\cos 2nx\cdot 2n\,dx\right]$$

$$= B_n\,[\pi - 0] = \pi\,B_n.$$

de donde:

$$\boxed{B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx} \qquad (3)$$

Esta integral es relativamente fácil de calcular.

Caso en el que la variable es el tiempo. — En este caso:

$$x = \omega t \quad \text{donde} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

y tendríamos, por ejemplo, para A_n:

$$\int_0^T f(t) \cdot \operatorname{sen} n\omega t \, dt = A_n \int_0^T \operatorname{sen}^2 n\omega t \, dt = A_n \int_0^T \left(\frac{1 - \cos 2n\omega t}{2}\right) dt$$

$$= A_n \left[\int_0^T \frac{dt}{2} - \frac{1}{4n\omega}\int_0^T \cos 2n\omega t \cdot 2n\omega \, dt\right]$$

$$= A_n \left[\frac{T}{2} - 0\right] = A_n \frac{T}{2}$$

de donde:

$$\boxed{A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \operatorname{sen} n\omega t \, dt} \tag{4}$$

del mismo modo tendríamos:

$$\boxed{B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt} \tag{5}$$

34. Simplificaciones. — Veremos que, en la mayor parte de los casos, existen simplificaciones en todos estos cálculos, y que hay muchos términos que desaparecen.

1er caso. — Supongamos (fig. 41) que la semi-onda negativa desde π hasta 2π sea idéntica, pero de signo contrario a la semi-onda posi-

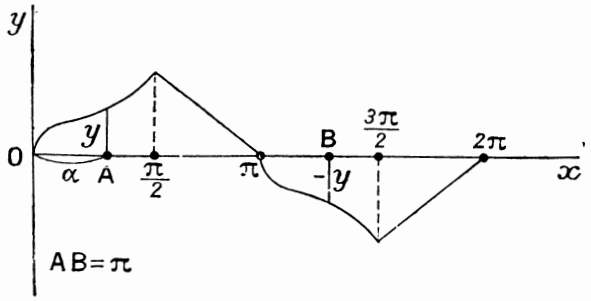

FIG. 41

tiva, desde 0 hasta π. Veremos que, en este caso, *no existe término constante, ni armónicos pares, solamente existen armónicos impares:*

$$y = f(x) = A_1 \operatorname{sen} x + A_3 \operatorname{sen} 3x + A_5 \operatorname{sen} 5x + \ldots$$
$$+ B_1 \cos x + B_3 \cos 3x + B_5 \cos 5x + \ldots$$
$$= Y_1 \operatorname{sen} (x - \varphi_1) + Y_3 \operatorname{sen} (3x - \varphi_3) + Y_5 \operatorname{sen} (5x - \varphi_5) + \ldots$$

En efecto: En primer lugar, A_0 es nulo, ya que las dos semialternancias son iguales y simétricas y *su valor medio es nulo* (si esta curva fuera la de una corriente eléctrica, un amperímetro de cuadro móvil no se desviaría).

— Veamos ahora lo que ocurre con los armónicos impares.

Si se toma un valor cualquiera $x = \alpha$, y se reemplaza α por $\alpha + \pi$, debemos, según la figura, encontrar el mismo valor para y, pero cambiado de signo, lo que es verdad para el primer término, ya que:

$$\text{sen } \alpha = -\text{sen } (\alpha + \pi).$$

Para los armónicos impares, ocurre lo mismo. En efecto, consideremos el término sen $(2K + 1)x$:

hagamos:

$$\text{sen } (2K + 1)\,\alpha = y,$$

tendremos:

$$\text{sen } (2K + 1)\,(\alpha + \pi) = \text{sen } [(2K + 1)\,\alpha + (2K + 1)\pi]$$

pero $(2K+1)\pi$ representa un número impar de veces el valor de π, y, por tanto, el seno cambia de signo y la expresión anterior se hace igual a $-y$, *como tenía que ocurrir,* por tanto, todos los armónicos impares subsisten.

— Estudiemos los armónicos pares, y consideremos el ángulo $2Kx$. Hagamos:

$$\text{sen } 2K\alpha = y,$$

tendremos:

$$\text{sen } 2K(\alpha+\pi)=\text{sen } (2K\alpha+2K\pi),$$

pero, $2K\pi$ es un múltiplo par de π, y volvemos al mismo lugar en el círculo trigonométrico, por tanto, la expresión anterior permanecería igual al valor de y, *lo que es contrario a la hipótesis.* Por tanto no pueden existir armónicos pares.

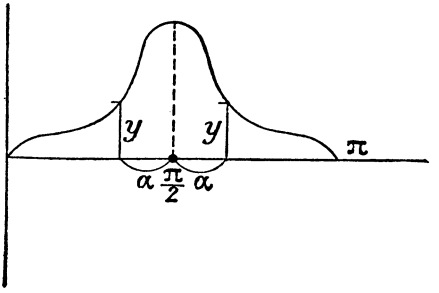

FIG. 42

2.° caso. — Si, *además,* cada semiperíodo está formado por dos cuartos de período simétricos respecto a la ordenada que corresponde al cuarto de período (fig. 42), entonces no existen términos en coseno, y tan sólo quedan los términos en seno:

$$y = A_1 \text{ sen } x + A_3 \text{ sen } 3x + A_5 \text{ sen } 5x + \ldots.$$

— En efecto, si se toman sobre la curva los valores $\frac{\pi}{2} - \alpha$ y $\frac{\pi}{2} + \alpha$, se obtiene el mismo valor para y. Pero sobre el círculo trigonométrico si tomamos $\frac{\pi}{2} + \alpha$ y $\frac{\pi}{2} - \alpha$ obtenemos el mismo valor para el seno de un ángulo, por tanto el mismo valor de y, lo cual está de acuerdo con la hipótesis. Los cosenos cambiarían de signo. Lo mismo ocurrirá con todos los armónicos pares, ya que:

$$\text{sen } (2K + 1)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen } [(2K + 1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon]$$

y

$$\text{sen } (2K + 1)\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \text{sen } [(2K + 1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon]$$

pero, como $2K + 1$ es un número impar, y un número impar de veces $\frac{\pi}{2}$, da el mismo valor para el seno, aunque se le añada o reste el mismo ángulo ε, por tanto y conserva el mismo valor. Mientras que para los armónicos pares, tendríamos:

$$\text{sen } 2K\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen } (2K \cdot \frac{\pi}{2} - \theta)$$

y

$$\text{sen } 2K\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \text{sen } (2K \cdot \frac{\pi}{2} + \theta),$$

pero, $2K$ es un número par, y un número par de veces $\frac{\pi}{2}$ *haría cambiar el seno* si se añade o resta el mismo ángulo θ, y, por tanto, y cambiaría de valor, lo cual es contrario a la hipótesis y por tanto *no podrá existir ningún armónico par*

Si la variable fuera el tiempo, escribiríamos ($x = \omega t$):

$$y = A_1 \text{ sen } \omega t + A_3 \text{ sen } 3\omega t + A_5 \text{ sen } 5\omega t + \ldots$$

Otra simplificación. — Puede ocurrir que no conozcamos la ecuación de la curva durante un período, pero la conozcamos durante un cuarto de período, suponiendo que las dos semialternancias sean iguales y de sentido contrario, y que, *además,* las dos mitades del *semiperíodo* sean iguales y simétricas respecto al cuarto de período. Podemos, en este caso, en lugar de integrar durante un período,

calculando A_n y B_n, según las fórmulas anteriores, integrar desde 0 hasta $\frac{T}{4}$ y multiplicar por 4, lo cual nos da:

$$A_n = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cdot \operatorname{sen} n\omega t \, dt \tag{6}$$

$$B_n = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt \tag{7}$$

Estas son las fórmulas que aplicaremos en los ejemplos siguientes y que desarrollaremos sobre curvas simétricas.

Estas fórmulas facilitan mucho los cálculos.

EJEMPLOS DE DESARROLLOS EN SERIE DE FOURIER

35. Primer ejemplo. — *Curva en diente de sierra rectangular (onda cuadrada)* (fig. 43).

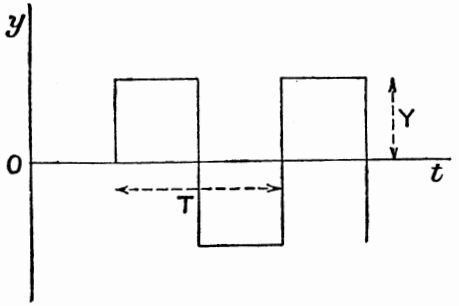

FIG. 43

La curva es doblemente simétrica, respecto al semiperíodo y respecto al cuarto de período, por tanto, sólo quedan términos en seno de los armónicos impares y no tiene término constante:

$$y = A_1 \operatorname{sen} \omega t + A_3 \operatorname{sen} 3\omega t + A_5 \operatorname{sen} 5\omega t + \ldots$$

Tan sólo conocemos la ecuación de la curva durante un cuarto de período:

$$y = Y_{max.}$$

Apliquemos la fórmula simplificada número 6:

$$A_n = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} y \operatorname{sen} n\,\omega t\,dt = \frac{8}{Tn\omega}\int_0^{\frac{T}{4}} Y \operatorname{sen} n\,\omega t \cdot n\omega\,dt$$

$$= -\frac{8}{Tn\omega} Y \left[\cos n\,\omega t\right]_0^{\frac{T}{4}} = -\frac{8Y}{Tn\omega}\left[\cos n\omega \frac{T}{4} - \cos 0\right]$$

sustituyamos ω por $\frac{2\pi}{T}$, lo cual nos da:

$$A_n = \frac{-8YT}{Tn \cdot 2\pi}\left[\cos n \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} - 1\right]$$

pero n es impar, y cos $n\frac{}{2}$ será siempre nulo, y nos queda:

$$A_n = \frac{4Y}{\pi n}.$$

Basta entonces reemplazar n por 1, 3, 5, 7 ... etc., y tendremos, finalmente:

$$y = \frac{4Y}{\pi}\left[\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5\omega t + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7\,\omega t + \ldots\right]$$

Naturalmente, para que la curva tenga un máximo horizontal y rectilíneo y trazos verticales, formando ángulos de 90° será necesario tomar un gran número de términos.

Este ejemplo sencillo, muestra el modo de hacer los cálculos.

36. Segundo ejemplo. — *Curva con dientes de sierra triangulares* (fig. 44).

La curva es doblemente simétrica, respecto al semiperíodo y respecto al cuarto de período, y solamente tendrá senos impares; apliquemos por tanto la fórmula simplificada de A_n, ya que tan sólo se conoce la ecuación de la curva durante 1/4 de período. Esta ecuación es la ecuación de una recta que pasa por el origen:

$$y = at.$$

Pero, para:

$$t = \frac{T}{4} \quad \text{tenemos} \quad y = Y_{max} \quad \text{de donde} \quad Y = a\frac{T}{4} \quad \text{y} \quad T = \frac{4Y}{a}$$

Entonces tendremos:

$$A_n = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} y \cdot \operatorname{sen} n\,\omega t\,dt = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} at \cdot \operatorname{sen} n\,\omega t\,dt$$

$$= \frac{8a}{Tn\omega}\int_0^{\frac{T}{4}} t \cdot \operatorname{sen} n\,\omega t \cdot n\omega\,dt.$$

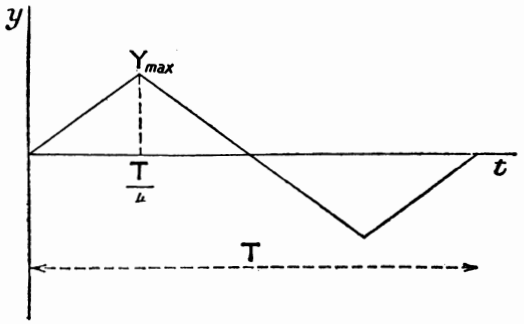

FIG. 44

Integremos por partes, haciendo:

$$u = t \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} n\,\omega t \cdot n\,\omega\,dt,$$

de donde:

$$A_n = \frac{8a}{Tn\omega}\left[t(-\cos n\,\omega t) - \int -\cos n\,\omega t \cdot dt\right]_0^{\frac{T}{4}}$$

$$= \frac{8a}{Tn\omega}\left[-\left(t \cdot \cos n\,\omega t\right)_0^{\frac{T}{4}} + \frac{1}{n\omega} \cdot \left(\operatorname{sen} n\,\omega t\right)_0^{\frac{T}{4}}\right]$$

$$= \frac{8a\,T}{Tn \cdot 2\pi}\left[-\left(\frac{T}{4}\cos n\,\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) + \frac{1}{n\omega}\left(\operatorname{sen} n\,\frac{2\pi}{T}\,\frac{T}{4}\right)\right]$$

pero, como m es impar, nos queda:

$$A_n = \frac{4a}{n\pi}\left[0 + \frac{1}{n\omega}\left(\operatorname{sen} n\,\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{4a}{n\pi} \cdot \frac{1}{n\omega}\operatorname{sen} n\,\frac{\pi}{2} = \frac{4a}{n^2\pi} \cdot \frac{T}{2\pi}\operatorname{sen} n\,\frac{\pi}{2}.$$

Pero:

$$a \cdot T = 4Y,$$

de donde:

$$A_n = \frac{8Y}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2}.$$

Basta ahora hacer:

$$n = 1, 3, 5, 7 \ldots,$$

y sustituir en la serie de FOURIER. Tendremos:

$$y = \frac{8Y}{\pi^2}\left(\operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5\omega t - \frac{1}{49}\operatorname{sen} 7\omega t + \ldots\right),$$

que es la ecuación de la curva con dientes de sierra triangulares. Pero para obtener ángulos vivos y líneas rectas, hay que tomar un gran número de términos.

37. Tercer ejemplo. — *Curva de una corriente alterna rectificada en una alternancia* (fig. 45).

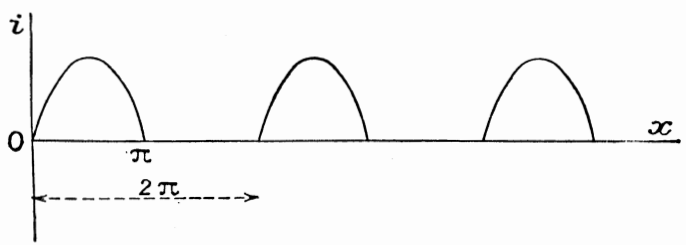

FIG. 45

En este caso no podemos hacer ninguna simplificación, ya que no existe ninguna simetría, y hay que calcular los tres coeficientes A_0, A_n y B_n.

La ecuación de la curva durante un semiperíodo es $i = I \operatorname{sen} \omega t$.

Hagamos $\omega t = x$.

Cálculo de A_0. — El término constante A_0 será:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} I \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} I \operatorname{sen} x\, dx\right],$$

pero la segunda integral es nula, ya que la corriente es nula y nos queda:

$$A_0 = \frac{-I}{2\pi}\left[\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{-I}{2\pi}\left[-1-1\right] = \frac{I}{\pi}.$$

Sabemos, además, que este es el valor medio de dicha corriente con una alternancia, valor que nos vendría medido por un amperímetro de cuadro móvil, que mide siempre valores medios.

Cálculo de A_n. — Tenemos, por la misma razón, integrando desde 0 hasta π:

$$A_n = \frac{I}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} nx \, dx$$

Pero:

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} \left[\cos (a - b) - \cos (a + b)\right]$$

de donde:

$$\operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \left[\cos (n - 1) x - \cos (n + 1) x\right]$$

lo cual nos da:

$$A_n = \frac{I}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos (n - 1) x \, dx - \frac{I}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos (n + 1) x \, dx$$

$$= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} (n - 1) x}{n - 1}\right]_0^{\pi} - \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} (n + 1) x}{n + 1}\right]_0^{\pi}$$

Si n es par, $n - 1$ y $n + 1$ son impares, y estas dos integrales son nulas cualquiera que sea n.

Si n es impar, $n - 1$ y $n + 1$ son pares y estas dos integrales son nulas cualquiera que sea n. Finalmente, si $n = 1$ nos queda:

Para el primer paréntesis: $\frac{0}{0}$.

Para el segundo paréntesis: 0.

El verdadero valor del primer paréntesis viene dado por la regla de L'Hôpital (derivando respecto a n):

$$\frac{N'}{D'} = x \cdot \frac{\cos (n - 1) x}{1}$$

y, para $n = 1$:

$$\frac{N'}{D'} = x \quad \text{que, para} \quad x = \pi, \quad \text{nos da } \pi.$$

Por fin, para $n = 1$:

$$A_n = \frac{I}{2\pi} \cdot \pi = \frac{I}{2}$$

En resumen, todos los términos de la serie de las A son nulos, *salvo el primero.*

Cálculo de B_n. — Tenemos, por la misma razón:

$$B_n = \frac{I}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \cdot \operatorname{sen} x \, dx.$$

Pero:

$$\cos nx \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} (n+1)x - \operatorname{sen} (n-1)x\right]$$

Tendremos, por tanto:

$$B_n = \frac{I}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} (n+1)x \, dx - \frac{I}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(n-1)x \, dx$$

$$= -\frac{I}{2\pi} \left[\frac{\cos (n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi} + \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\cos (n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

Si $n = 1$ nos queda, pasando a los límites:

Para el primer paréntesis: $1 - 1 = 0$.

Para el segundo paréntesis: $\frac{I}{2\pi} \left[\frac{\cos 0 - \cos 0}{0}\right] = \frac{0}{0}$,

cuyo valor verdadero es, derivando *respecto a* n:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{-x \cdot \operatorname{sen} (n-1)x}{1} = -x \cdot 0 = 0.$$

Si n es impar, $n + 1$ y $n - 1$ son pares y las dos integrales, al pasar a los límites, son nulas (dan $1 - 1 = 0$).

Si n es par, $n + 1$ y $n - 1$ son impares y tenemos:

$$-\frac{I}{2\pi} \left(\frac{-1-1}{n+1}\right) + \frac{I}{2\pi} \left(\frac{-1-1}{n-1}\right) = \frac{I}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= \frac{I}{\pi} \left[\frac{n-1-(n+1)}{n^2-1}\right] = \frac{I}{\pi} \left(-\frac{2}{n^2-1}\right)$$

expresión en la cual haremos: $n = 2, 4, 6, 8$.....

Es decir, que en la serie de las B, tan sólo existen armónicos pares.

— En resumen, se obtiene el desarrollo siguiente:

$$y = f(x) = \frac{I}{\pi} + \frac{I}{2} \operatorname{sen} x - \frac{2I}{\pi} \frac{\cos 2x}{(4-1)} - \frac{2I}{\pi} \frac{\cos 4x}{(16-1)} - \frac{2I}{\pi} \frac{\cos 6x}{(36-1)}$$

$$= I \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{2}{3\pi} \cos 2x - \frac{2}{15\pi} \cos 4x - \frac{2}{35\pi} \cos 6x \ldots\right]$$

y

$$Y_{media} = \frac{I}{\pi}.$$

Si la variable fuera el tiempo t, como ocurre con la corriente eléctrica, sustituiríamos x por ωt.

38. Cuarto ejemplo. — *Curva de una corriente alterna rectificada en dos alternancias* (fig. 46).

Podría hacerse un cálculo idéntico al anterior, pero sería bastante largo. Para abreviar los cálculos: se parte de la curva de una alternancia, del ejemplo anterior, y se sustituye ωt por $\omega t + \pi$ (fig. 47). Se obtiene así un nuevo desarrollo que se suma con el primero, lo que da finalmente, después de hacer los cálculos:

$$i = \frac{2I}{\pi}\left[1 - \frac{2}{1 \cdot 3}\cos 2\,\omega t - \frac{2}{3 \cdot 5}\cos 4\,\omega t \ldots\right]$$

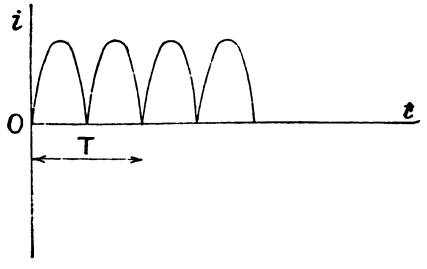

FIG. 46

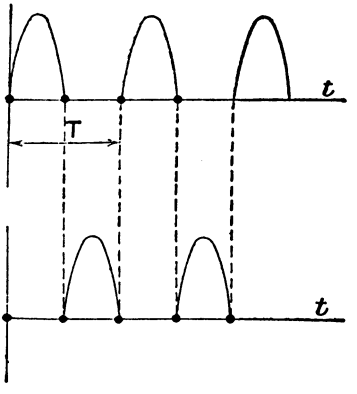

FIG. 47

No tiene frecuencia fundamental, y tan sólo existen los armónicos pares y un término constante que es la corriente media:

$$I_{media} = \frac{2I}{\pi}$$

que podríamos medir con un amperímetro de cuadro móvil.

39. Algunas consecuencias eléctricas del teorema de Fourier. — Supongamos una diferencia de potencial alterna no sinusoidal:

$$v = V_0 + V_1 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi_1) + V_2 \operatorname{sen}(2\omega t - \varphi_2) + V_3 \operatorname{sen}(3\omega t - \varphi_3) + \ldots$$

aplicada en las bornas de un circuito constituido por una resistencia

óhmica R, en serie con un condensador de capacidad C y en serie con una bobina cuyo coeficiente de autoinducción (o inductancia) es L.

La corriente estará también compuesta por armónicos: cada armónico de tensión origina un armónico de corriente, defasado en un cierto ángulo α; tendremos, por tanto:

$$i = I_0 + I_1 \operatorname{sen} (\omega t - \varphi_1 - \alpha_1) + I_2 \operatorname{sen} (2\omega t - \varphi_2 - \alpha_2) + I_3 \operatorname{sen} (3\omega t - \varphi_3 - \alpha_3) + \ldots$$

donde:

$$I_0 = 0$$

(debido a que el condensador C en serie no permite el paso de la corriente continua)

$$I_1 = \frac{V_1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{\sqrt{R^2 + \left(L2\omega - \frac{1}{C \cdot 2\omega}\right)^2}}$$

$$I_n = \frac{V_n}{\sqrt{R^2 + \left(L \cdot n\omega - \frac{1}{C \cdot n\omega}\right)^2}}$$

Deducimos entonces las **conclusiones importantes:**

1.° Si el circuito sólo contiene resistencias, la forma de la curva de corriente es igual a la forma de la curva de tensión.

2.° La reactancia inductiva es $Ln\omega$, y por tanto, resulta que si el circuito no contiene condensadores, los armónicos se *atenúan* más y más, y la curva de corriente se asemeja a una sinusoide más que la curva de tensión.

3.° La reactancia capacitiva es $\frac{1}{C n\omega}$, y, por tanto, resulta que si el circuito no contiene bobinas de inducción, los armónicos altos son *reforzados* y la curva de corriente es muy diferente de una sinusoide.

4.° El desfase de la corriente sobre la tensión viene dado por:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{L n\omega - \frac{1}{C n\omega}}{R}$$

donde n es el rango del armónico. Por tanto, si n tiende hacia infinito, $\operatorname{tg} \alpha_n \to \infty$, y α tiende hacia $\frac{\pi}{2}$, y los armónicos altos tienden a estar en cuadratura con la tensión. Resulta que la potencia eléctrica está formada sobre todo por el término fundamental y parcialmente por los primeros armónicos.

5.° Finalmente, si:

$$L\, n\omega = \frac{1}{C\, n\omega}$$

hay *resonancia* sobre el armónico de rango n, y tendremos una sobretensión, es decir que las diferencias de potencial en los bornes de L y en los bornes de C se reforzarán. Los «*analizadores*» eléctricos se basan en este principio, y permiten medir el rango y la intensidad de los diferentes armónicos de una función no sinusoidal: variando C (disminuyéndolo poco a poco) el circuito entra en resonancia con los diferentes armónicos.

40. Algunas fórmulas de los desarrollos en serie de Fourier. — Desde el punto de vista eléctrico se utilizan frecuentemente corrientes bifásicas, trifásicas, tetrafásicas y hexafásicas *rectificadas* (por medio de válvulas o rectificadores de mercurio) y es interesante el calcular sus desarrollos en serie de FOURIER para conocer cuáles son los armónicos que contienen. Se encuentran las fórmulas siguientes:

1.° **Corriente monofásica rectificada** (fig. 48):

$$i = I_{max}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4\cos 2x}{\pi(1\cdot 3)} - \frac{4\cos 4x}{\pi(3\cdot 5)} - \ldots\right)$$

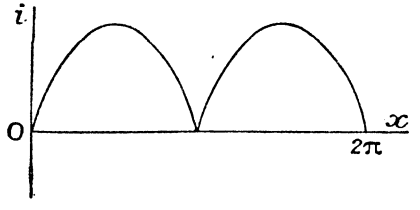

FIG. 48

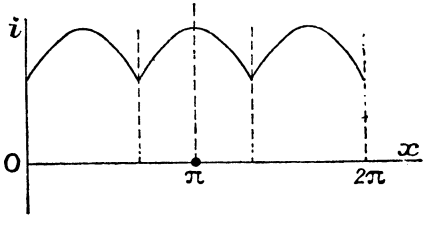

FIG. 49

2.° **Corriente trifásica rectificada** (fig. 49):

$$i = I_{max}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3\sqrt{3}\cos 3x}{\pi\cdot 2\cdot 4} - \frac{3\sqrt{3}\cos 6x}{\pi\cdot 5\cdot 7} - \ldots\right)$$

3.° **Corriente tetrafásica rectificada** (fig. 50):

$$i = I_{max}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}\cos 4x}{\pi \cdot 3 \cdot 5} - \frac{4\sqrt{2}\cos 8x}{\pi \cdot 7 \cdot 9} - \ldots\right)$$

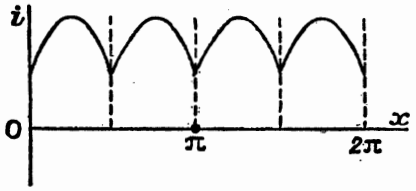

FIG. 50

4.° **Corriente hexafásica rectificada** (fig. 51):

$$i = I_{max}\left(\frac{3}{\pi} - \frac{6\cos 6x}{\pi \cdot 5 \cdot 7} - \frac{6\cos 12x}{\pi \cdot 11 \cdot 13} - \ldots\right)$$

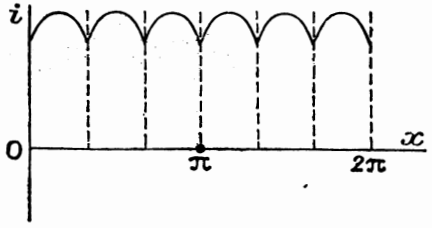

FIG. 51

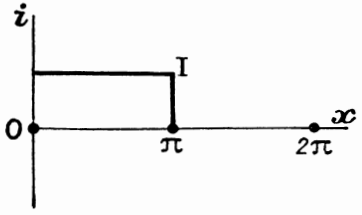

FIG. 52

Otras formas de curvas.

5.° **Onda simple rectangular** (fig. 52):

$$i = \frac{I}{2} + \frac{2I}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \ldots\right)$$

6.° **Onda rectangular discontinua** (fig. 53):

$$i = \frac{2\sqrt{3}\,I}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{11}\cos 11x + \ldots\right)$$

7.° **Onda trapezoidal** (fig. 54):

$$i = \frac{6\sqrt{3}\,I}{\pi^2}\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{49}\operatorname{sen} 7x - \ldots\right)$$

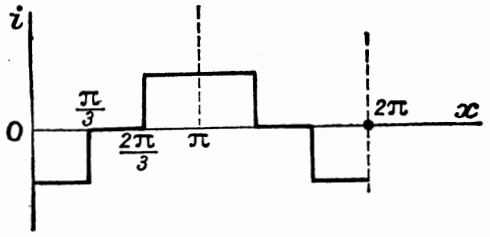

FIG. 53

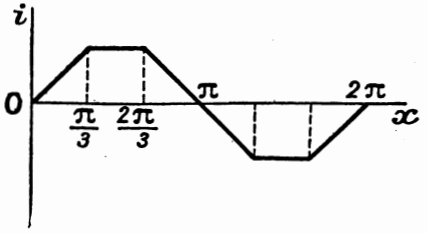

FIG. 54

8.° **Onda de la figura** (55):

$$i = \frac{2I}{\pi}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)\right]$$

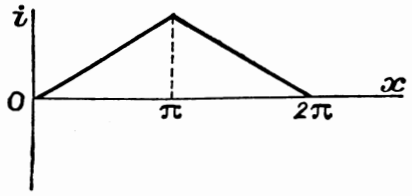

FIG. 55

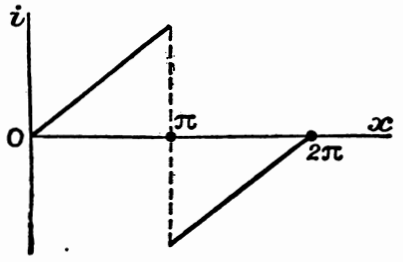

FIG. 56

9.° **Onda de la figura** (56):

$$i = \frac{2I}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots\right]$$

CAPITULO IV

INTEGRACION GRAFICA Y CALCULO APROXIMADO DE UNA INTEGRAL

41. Procedimiento gráfico para calcular una integral simple. — Frecuentemente ocurre que no se puede calcular una integral por los procedimientos conocidos o que se haya obtenido una curva *experimentalmente,* curva de la que no se conocía la ecuación, pero que sin embargo interesa calcular la superficie comprendida entre la curva y el eje x.

En resumen, se trata de calcular gráficamente esta superficie, y como una integral es una superficie, se podrá generalizar y aplicar este procedimiento, para calcular una integral que no se sabe resolver.

Hay varios procedimientos y varias fórmulas, pero daremos tan sólo una, que es la aplicación de la fórmula de SIMPSON. Esta fórmula tiene la ventaja de ser sencilla de aplicar y de dar resultados más exactos que por otros procedimientos.

Fórmula de Simpson. — El principio consiste en dividir el intervalo de x, en el cual se va a hacer la integración, en un cierto número de partes, y, en cada una de ellas, asimilar la curva a un arco de parábola de segundo o tercer grado, y de la parábola calcular después los coeficientes. Se calcula fácilmente la superficie comprendida entre cada una de estas partes de la curva y el eje x, y después se suman todas las superficies para obtener la superficie total.

— Sea un pequeño elemento de arco de curva AC, que corta al eje de las y, y cuyas abscisas extremas son $-h$ y $+h$. Llamemos y_1 e y_2 las ordendas de sus extremos e y_0 la ordenada correspondiente a $x = 0$ (fig. 57).

Reemplacemos el arco de curva AC, que es pequeño por hipótesis, por un arco de parábola de segundo grado, *o mejor* de *tercer grado* (para obtener más precisión), y sea:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

la ecuación de este trozo de curva.

La superficie entre la curva y el eje de las x es:

$$S = \int_{-h}^{+h} (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_{-h}^{+h}.$$

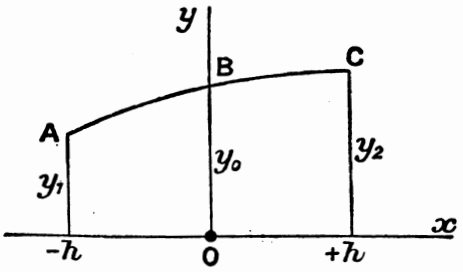

FIG. 57

Pero, pasando a los límites, todos los términos de grado par se anulan, mientras que los de grado impar se suman y tendremos entonces:

$$S = \frac{2bh^3}{3} + 2dh. \qquad (1)$$

Por otra parte, calculemos y_1, y_2 e y_0:

$$y_0 = d$$
$$y_1 = -ah^3 + bh^2 - ch + d$$
$$y_2 = ah^3 + bh^2 + ch + d$$
$$y_1 + y_2 = 2bh^2 + 2d.$$

Tendremos, según la fórmula (1):

$$3S = 2bh^3 + 6dh = h(2bh^2 + 6d)$$
$$= h(y_1 + y_2 + 4d)$$
$$= h(y_1 + y_2 + 4y_0)$$

de donde deducimos:

$$S = \frac{h}{3}(y_1 + y_2 + 4y_0)$$

fórmula llamada *de los tres niveles*

— Calculemos ahora la integral:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

donde la ecuación de la curva $y = f(x)$ es una función cualquiera (fig. 58). Tenemos que calcular la superficie total a_1A_1Bb.

Dividamos el intervalo a_1b en un número par de partes iguales a h, es decir en $2n$ partes, de donde:

$$h = \frac{b-a}{2n},$$

se obtendrán así $2n + 1$ ordenadas: $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_{2n}, y_{2n+1}$.

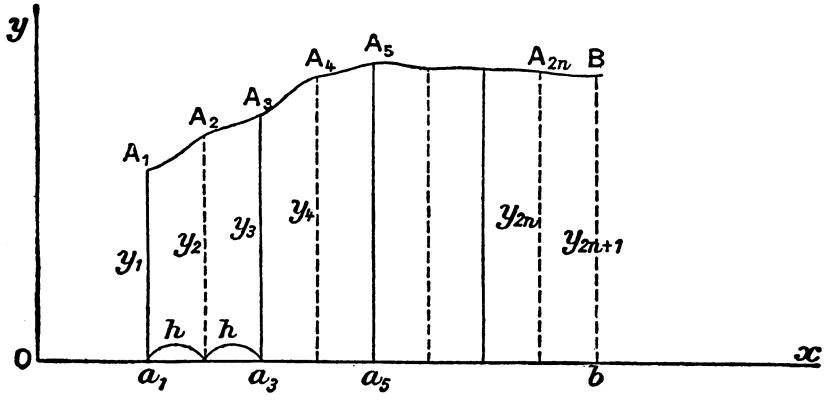

FIG. 58

Consideremos las superficies comprendidas entre dos ordenadas de índice impar (trazadas en línea continua). La primera es $a_1A_1A_3a_3$. Reemplacemos el arco A_1A_3 por una parábola de tercer grado, y, entonces, la superficie vendrá dada por la fórmula de los tres niveles:

$$S_1 = \frac{h}{3}(y_1 + y_3 + 4y_2),$$

del mismo modo, la superficie $a_3A_3A_5a_5$ será:

$$S_2 = \frac{h}{3}(y_3 + y_5 + 4y_4), \qquad \text{etc.}$$

Sumando estas n superficies obtenemos la fórmula de SIMPSON.

$$S = \frac{h}{3}[y_1 + y_{2n+1} + 2(y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n})]$$

— Si llamamos:

E a la suma de las ordenadas extremas.

I a la suma de las ordenadas de índice impar (a excepción de las dos ordenadas extremas).

P a la suma de las ordenadas de índice par, obtendremos la fórmula simbólica:

$$S = \frac{h}{3}[E + 2I + 4P]$$

o bien:

$$\boxed{S = \frac{b-a}{6n}[E + 2I + 4P]}$$

Señalaremos al lector que si en lugar de tener la expresión de una integral a calcular, tenemos una curva que se ha obtenido experimentalmente, basta *medir* sobre la curva las diferentes ordenadas $y_1 y_2 y_3 \ldots$ etc.

42. Ejemplos.

1.° *Calcular*

$$I = \int_1^2 \log_{10} x \, dx.$$

— Consideremos la función:

$$y = \log_{10} x$$

y dividamos el intervalo de 1 a 2 en diez partes iguales ($2n = 10$). Tendremos:

$$\begin{aligned} y_1 &= \log 1 \;\; = 0 & y_7 &= \log 1{,}6 = 0{,}204 \\ y_2 &= \log 1{,}1 = 0{,}041 & y_8 &= \log 1{,}7 = 0{,}230 \\ y_3 &= \log 1{,}2 = 0{,}079 & y_9 &= \log 1{,}8 = 0{,}255 \\ y_4 &= \log 1{,}3 = 0{,}114 & y_{10} &= \log 1{,}9 = 0{,}278 \\ y_5 &= \log 1{,}4 = 0{,}146 & y_{11} &= \log 2 \;\; = 0{,}301. \\ y_6 &= \log 1{,}5 = 0{,}176 \end{aligned}$$

Y la superficie será:

$$S = \frac{0{,}1}{3}\Big[(0 + 0{,}301) + 2(0{,}079 + 0{,}146 + 0{,}204 + 0{,}255) + 4(0{,}041 + 0{,}114 + 0{,}176 + 0{,}230 + 0{,}278)\Big] = 0{,}167.$$

2.° *Calcular el valor de* π *partiendo de la fórmula:*

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

—Tenemos:

$$\pi = \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2},$$

y haremos:

$$y = \frac{4}{1+x^2}. \qquad (1)$$

Dividamos el intervalo de 0 a 1 en diez partes iguales, y tendremos $h = 0{,}1$.

La fórmula de SIMPSON nos da entonces:

$$\pi = \frac{0{,}1}{3}\left[y_1 + y_{11} + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})\right]$$

En la ecuación (1) sustituyamos x por las diferentes abscisas:

$$y_1 = \frac{4}{1+0} = 4$$

$$y_2 = \frac{4}{1+0{,}1^2} = \frac{4}{1{,}01} \quad \text{de donde} \quad 4y_2 = 15{,}84158$$

$$y_3 = \frac{4}{1+0{,}2^2} = \frac{4}{1{,}04} \quad \text{»} \quad 2y_3 = 7{,}69230$$

$$y_4 = \frac{4}{1+0{,}3^2} = \frac{4}{1{,}09} \quad \text{»} \quad 4y_4 = 14{,}67889$$

$$y_5 = \frac{4}{1+0{,}4^2} = \frac{4}{1{,}16} \quad \text{»} \quad 2y_5 = 6{,}89655$$

$$y_6 = \frac{4}{1+0{,}5^2} = \frac{4}{1{,}25} \quad \text{»} \quad 4y_6 = 12{,}80000$$

$$y_7 = \frac{4}{1+0{,}6^2} = \frac{4}{1{,}36} \quad \text{»} \quad 2y_7 = 5{,}88235$$

$$y_8 = \frac{4}{1+0{,}7^2} = \frac{4}{1{,}49} \quad \text{»} \quad 4y_8 = 10{,}73825$$

$$y_9 = \frac{4}{1+0{,}8^2} = \frac{4}{1{,}64} \quad \text{»} \quad 2y_9 = 4{,}87804$$

$$y_{10} = \frac{4}{1+0{,}9^2} = \frac{4}{1{,}81} \quad \text{»} \quad 4y_{10} = 8{,}83977$$

$$y_{11} = \frac{4}{1+1} = 2.$$

Sustituyendo en la fórmula se obtiene:

$$\pi = \frac{9{,}42477}{3} = 3{,}14159...$$

3.° *Calcular:*

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx.$$

— Esta integral no puede calcularse por procedimientos ordinarios, salvo en el caso en que se desarrolle en serie de MAC-LAURIN. Aplicaremos la fórmula de SIMPSON y dividiremos el intervalo de 0 a 2 en seis partes iguales, con lo que tenemos:

$$h = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}.$$

Sea por tanto la función:

$$y = e^{-x^2},$$

en el cual haremos:

$$x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}:$$

$$y_1 = e^{-0} = 1 \qquad y_5 = e^{-\frac{16}{9}} = 0{,}1690$$

$$y_2 = e^{-\frac{1}{9}} = 0{,}8948 \qquad y_6 = e^{-\frac{25}{9}} = 0{,}0621$$

$$y_3 = e^{-\frac{4}{9}} = 0{,}6411 \qquad y_7 = e^{-4} = 0{,}0183$$

$$y_4 = e^{-1} = 0{,}3678$$

Tendremos:

$$S = \frac{h}{3}[y_1 + y_7 + 2(y_3 + y_5) + 4(y_2 + y_4 + y_6)]$$

$$= \frac{1}{9}\left[1 + 0{,}0183 + 2(0{,}6411 + 0{,}1690) + 4(0{,}8948 + 0{,}3678 + 0{,}0621)\right]$$

$$= 0{,}8819.$$

La integral anterior juega un importante papel en el Cálculo de Probabilidades.

4.° *Calcular la longitud de un arco de sinusoide:*

$$y = \operatorname{sen} x.$$

— Calculemos la longitud de un semiarco, haciendo variar el ángulo x, desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

Tenemos la fórmula:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

de donde:

$$l = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Dividamos el intervalo de 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ en seis partes iguales ($2n=6$). Obtenemos:

$$y_1 = \sqrt{1 + \cos^2 0} = \sqrt{2} = 1{,}414$$
$$y_2 = \sqrt{1 + \cos^2 15°} = 1{,}387$$
$$y_3 = \sqrt{1 + \cos^2 30°} = 1{,}323$$
$$y_4 = \sqrt{1 + \cos^2 45°} = 1{,}225$$
$$y_5 = \sqrt{1 + \cos^2 60°} = 1{,}118$$
$$y_6 = \sqrt{1 + \cos^2 75°} = 1{,}033$$
$$y_7 = \sqrt{1 + \cos^2 90°} = 1.$$

La longitud del arco de la sinusoide será:

$$l = \frac{b-a}{6n}\,[\mathrm{E} + 2\mathrm{I} + 4\mathrm{P}]$$

$$= 2\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{6 \cdot 3}\right)\Big[1{,}414 + 1 + 2(1{,}323 + 1{,}118) + 4(1{,}387 + 1{,}225 + 1{,}033)\Big]$$

$$= 3{,}818.$$

5.° *Calcular*

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx.$$

— Dividamos el intervalo, desde 0 hasta 1, en diez partes iguales ($2n = 10$):

$$h = \frac{1}{10}.$$

Tendremos:

$$I = \frac{h}{3}[E + 2I + 4P]$$

$$= \frac{1}{30}\left[y_1 + y_{11} + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})\right]$$

Por otra parte:

$$\frac{\pi x^2}{2} \text{ radianes} = 100\, x^2 \text{ grados.}$$

Para simplificar los cálculos, expresemos los ángulos en grados. Tendremos, desde 0 hasta 100 grados ($x = 1$):

$y_1 = \cos\ 0\ \text{gr} = 1$
$y_2 = \cos\ 1\ \text{gr} = 0{,}9999$
$y_3 = \cos\ 4\ \text{gr} = 0{,}9980$
$y_4 = \cos\ 9\ \text{gr} = 0{,}9900$
$y_5 = \cos 16\ \text{gr} = 0{,}9686$
$y_6 = \cos 25\ \text{gr} = 0{,}9239$
$y_7 = \cos 36\ \text{gr} = 0{,}8443$
$y_8 = \cos 49\ \text{gr} = 0{,}7181$
$y_9 = \cos 64\ \text{gr} = 0{,}5358$
$y_{10} = \cos 81\ \text{gr} = 0{,}2940$
$y_{11} = \cos 100\ \text{gr} = 0.$

Sustituyendo estos valores en I, se obtiene:

$$I = \frac{1}{30}\left[(1 + 0) + 2(0{,}9980 + 0{,}9686 + 0{,}8443 + 0{,}5358) + 4(0{,}9999 + 0{,}9900 + 0{,}9239 + 0{,}7181 + 0{,}2940)\right]$$

$$= 0{,}780.$$

Observación. — Veremos más adelante, en el capítulo de las integrales dobles, un ejemplo de cálculo del momento de inercia que da una integral complicada, que calcularemos por la fórmula de SIMPSON.

CAPITULO V

INTEGRALES CURVILINEAS
INTEGRACION DE LAS DIFERENCIALES TOTALES

43. Integrales curvilíneas.

Definición. — Sea una curva cualquiera en el plano xOy y cuya ecuación es $y = f(x)$, tomemos sobre esta curva dos puntos P_0 y P, de coordenadas x_0, y_0 y x, y.

Consideremos ahora una expresión de la forma:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy$$

donde las funciones f y φ son funciones dadas de x e y, que no tienen ninguna relación con la ecuación de la curva. Se trata de definir claramente la integral:

$$\int f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy$$

tomada a lo largo de la curva, desde P_0 hasta P.

— Dividamos el arco P_0P en n partes (iguales o desiguales) por medio de los puntos $P_1P_2P_3\ldots$ de coordenadas (x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3), ..., y consideremos la suma:

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_0) \cdot f(x_0, y_0) + (y_1 - y_0) \cdot \varphi(x_0, y_0) \\
+\ &(x_2 - x_1) \cdot f(x_1, y_1) + (y_2 - y_1) \cdot \varphi(x_1, y_1) \\
+\ &(x_3 - x_2) \cdot f(x_2, y_2) + (y_3 - y_2) \cdot \varphi(x_2, y_2) \\
+\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si n tiende hacia infinito, los intervalos $P_0P_1P_2P_3\ldots$ tienden hacia cero, y la suma anterior tiende hacia un límite que es, por definición, la integral de:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy$$

tomada a lo largo de la curva, desde P_0 hasta P, y que se llama integral curvilínea, que se escribe:

$$\int_{P_0}^{P} f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy$$

— Como y es función de x, para calcularla la reduciremos a una integral simple: basta expresar x e y en función de un solo parámetro t o bien θ, de modo que cuando t varíe desde t_0 hasta t_1, se describa el arco P_0P una sola vez.

En el Tomo III hicimos ya un cálculo de este tipo al calcular la superficie de una curva cerrada.

Hemos encontrado ya varios ejemplos de integrales de la misma naturaleza que las integrales curvilíneas. Así, por ejemplo, la superficie de una curva cerrada tomada a lo largo de una curva C es:

$$\int_C y\,dx,$$

y en este caso, tenemos:

$$f(x, y) = y, \qquad \varphi(x, y) = 0.$$

Del mismo modo, la superficie de un sector de curva, limitado por un arco de curva AB y dos radios vectores OA y OB, viene dada por:

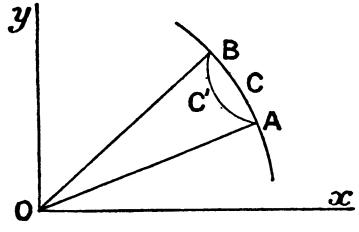

FIG. 59

$$S = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx),$$

tomada a lo largo del arco P_0P, y en este caso tenemos:

$$f(x, y) = -y, \qquad \varphi(x, y) = x.$$

— En general, una integral de este tipo, tomada a lo largo de una curva, desde A hasta B, cambia de valor según la naturaleza de la curva comprendida entre los puntos A y B, es decir, en resumen, que depende de la ecuación de la curva. Así, por ejemplo, la integral curvilínea (fig. 59):

$$\int_A^B \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

tomada a lo largo del arco BCA es, según vimos en el capítulo de cálculo de superficies, la superficie del sector AOB, pero cambia de

valor si se toma otra curva C', es decir, si se cambia la ecuación de la curva, como es evidente.

Sin embargo, en ciertos casos, una integral curvilínea, es decir, tomada a lo largo de una curva, depende tan sólo del punto de partida y del punto de llegada y no del camino recorrido.

Por ejemplo, la integral:

$$\int_A^B (x\,dy + y\,dx)$$

tomada a lo largo de una curva C es independiente del camino recorrido y depende tan sólo de los límites.

En efecto, $x\,dy + y\,dx$ es una diferencial total exacta, es la diferencial total del producto xy:

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy,$$

y tendremos:

$$\int_A^B (x\,dy + y\,dx) = \int_A^B d\,(xy) = \Big[\, xy \,\Big]_A^B = x_B y_B - x_A y_A.$$

Esta integral, por tanto, sólo depende del punto de partida y del punto de llegada, ya que se trata de una integral definida que sólo depende de los límites.

Podemos, por tanto, generalizar, ya que la integral de una diferencial total exacta sólo depende de los límites.

Sin embargo, es necesario demostrarlo de un modo muy general, mediante el teorema siguiente que damos, inspirándonos en la demostración de P. APPELL.

44. Teorema. — *Para que una integral curvilínea*

$$I = \int_A^B f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy$$

tomada a lo largo de una curva, sea independiente del camino recorrido, es necesario y suficiente, que la expresión a integrar

$$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy$$

sea una diferencial total exacta, es decir, que se cumpla que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

— En efecto, consideremos la integral I, tomada a lo largo de una curva, entre dos puntos A y B, de coordenadas $x_A y_A$ y $x_B y_B$. Si dicha integral no depende del camino recorrido, queda determinada cuando se conocen estas cuatro coordenadas, es, por tanto, función de x_A, de y_A, de x_B y de y_B y podremos escribir:

$$I = F(x_A, y_A, x_B, y_B).$$

Hagamos ahora variar x_B en dx (fig. 60); el punto B pasa al punto D y la integral va a variar en una cantidad correspondiente al recorrido BD y que es precisamente:

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy.$$

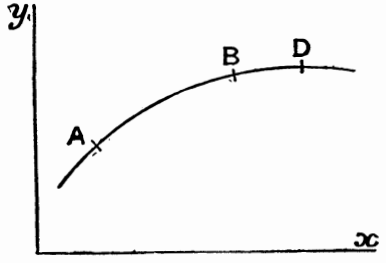

FIG. 60

Por otra parte, el incremento de la función F es su diferencial total:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy.$$

Tendremos, por tanto:

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy = F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy,$$

y se deduce que:

$$f(x, y) = F'_x$$

y

$$\varphi(x, y) = F'_y$$

es decir, la expresión:

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy$$

es la diferencial total exacta de una cierta función $F(x, y)$.

Demostremos que esta condición es suficiente. Si la expresión:

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy$$

es una diferencial total exacta, tendremos:

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy = dF(x, y),$$

donde $F(x, y)$ es una función desconocida de x y de y.

Tendremos, finalmente, integrando:

$$\int_A^B f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy = \int_A^B dF(x, y) = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A).$$

expresión que sólo depende de los límites extremos *y no del camino recorrido.*

45. Aplicación.

La noción de potencial, en electricidad y en mecánica goza de esta propiedad. Ya lo demostramos al principio de este Tomo IV, cuando definimos y calculamos el potencial en un punto de un campo electrostático.

Estas nociones sirven también constantemente en termodinámica y en el estudio de los motores térmicos.

Así, *por ejemplo,* sea un gas de volumen v, sometido a una presión p y a una temperatura t. Estas tres magnitudes están relacionadas por la fórmula general:

$$f(v, p, t) = 0$$

Para los gases perfectos, tenemos:

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = \text{C}^{\text{te}}. \quad \left(\alpha = \frac{1}{273}\right)$$

A temperatura constante, se puede representar el estado de un cuerpo por una gráfica con v en abscisas y p en ordenadas. Sea un punto cualquiera correspondiente a una presión p y a un volumen v. Para pasar a un estado infinitamente próximo, correspondiente a $v + dv$ y $p + dp$, hay que suministrarle una cantidad de calor:

$$dQ = a \cdot dv + b \cdot dp$$

donde a y b son coeficientes, que son a su vez función de v y de p. Para ir de un estado a otro, tendremos una cantidad de calor total, igual a:

$$\text{Q} = \int_{\text{C}} (a\, dv + b\, dp)$$

efectuándose la integral a lo largo de la curva $v = f(p)$.

Pero, contrariamente a lo que creíamos, Q depende de los estados intermedios y no solamente del estado inicial y del estado final: $a\, dv + b\, dp$ no es, por tanto, una diferencial total exacta.

Pero, si hacemos $T = t + 273$, que se llama *temperatura absoluta,* se demuestra en termodinámica que la expresión:

$$\frac{d\text{Q}}{\text{T}} = \frac{a\, dv}{\text{T}} + \frac{b\, dp}{\text{T}} = \text{M}\, dv + \text{N}\, dp$$

es una diferencial total exacta, es decir que tenemos:

$$\frac{\partial \text{M}}{\partial p} = \frac{\partial \text{N}}{\partial v}.$$

Podemos entonces decir que esta expresión $\frac{dQ}{T}$ es la diferencial total exacta de una cierta función de v y de p, que designaremos por S:

$$\frac{dQ}{T} = \frac{a\,dv}{T} + \frac{b\,dp}{T} = dS$$

de donde:

$$S = \int_C \frac{dQ}{T}$$

que se llama *entropía del cuerpo y que es independiente de las transformaciones sufridas, ya que depende tan sólo del estado final y del estado inicial.*

En particular, para los gases perfectos, llamando c al calor específico a volumen constante y C al calor específico a presión constante, tenemos:

$$dS = C\frac{dv}{v} + c\frac{dp}{p} = \frac{dQ}{T}$$

de donde la entropía:

$$S = \text{Log}\, p^c v^C + K.$$

46. Ejemplos de cálculo de integrales curvilíneas.

1.° *Calcular* $\int (y^2\,dx - x^2\,dy)$ *a lo largo de la recta* AB *de la figura* 61, *después a lo largo del círculo* AB *y comparar los dos resultados.*

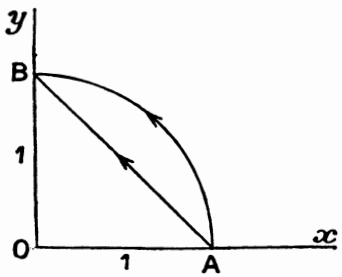

FIG. 61

— Verifiquemos primero si la cantidad a integrar es una diferencial total exacta:

$$y^2dx - x^2dy = M\,dx + N\,dy.$$

Para esto hay que verificar que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Pero:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x,$$

como estas cantidades no son iguales, no tenemos una diferencial total exacta y el resultado de la integral dependerá del camino recorrido.

Vamos a verificarlo:

1.º La ecuación de la recta AB es:

$$y = -x + 1$$

o bien:

$$x + y = 1 \quad \text{y} \quad dx = -dy.$$

Tendremos:

$$\int_1^0 (y^2dx - x^2dy) = \int_1^0 (1-x)^2dx + \int_1^0 x^2dx$$

$$= \int_1^0 dx - 2\int_1^0 x\,dx + 2\int_1^0 x^2dx = -1 - \left[x^2\right]_1^0 + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^0$$

$$= -1 + 1 + \frac{2}{3}(-1) = -\frac{2}{3}.$$

2.º Integremos ahora a lo largo de la circunferencia, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

de donde:

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{y} \quad dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tendremos:

$$\int_1^0 (y^2dx - x^2dy) = \int_1^0 (1-x^2)dx + \int_1^0 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[x\right]_1^0 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^0 + \mathrm{I} = -\frac{2}{3} + \mathrm{I}.$$

Calculemos I por partes:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x^2 \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^2\sqrt{1-x^2} + \int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\mathrm{I} = -x^2\sqrt{1-x^2} + \int \frac{2x(1-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} + \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - 2\mathrm{I}$$

o bien:

$$3\mathrm{I} = -x^2\sqrt{1-x^2} + \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

y, finalmente:

$$I = \frac{1}{3}\left[-x^3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{1-x^2}\right]_1^0 = -\frac{1}{3}\left[\sqrt{1-x^2}\,(x^2+2)\right]_1^0$$

$$= -\frac{1}{3}[2-0] = -\frac{2}{3}.$$

La integral total será:

$$\int_1^0 (y^3\,dx - x^3\,dy) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3},$$

resultado que es diferente del anterior, lo cual confirma que la expresión a integrar no es una diferencial total exacta.

2.° *Calcular* $I = \int\left(y^3\,dx + \frac{dy}{2-x^2}\right)$ *a lo largo del círculo* AMB (*fig.* 62), *después a lo largo del contorno* ACB, *siendo el radio del círculo igual a* 1.

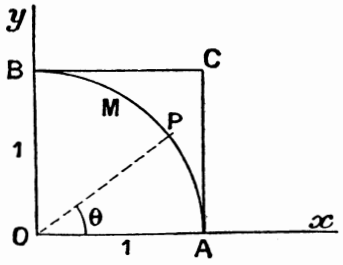

FIG. 62

—1.° *Cálculo a lo largo del círculo:* Es más sencillo tomando coordenadas polares, siendo R = 1. Para un punto P cualquiera del arco AMB, tenemos:

$$x = \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta$$

$$dx = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta \qquad dy = \cos\theta\,d\theta,$$

de donde:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{2-\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-3\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}3\theta}{4}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \left[\frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{12} + \operatorname{arc\,tg}1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

2.° *Cálculo a lo largo del contorno* ACB: A lo largo de AC, x es constante e igual a 1, $dx = 0$ y nos queda:

$$I_1 = 0 + \int_0^1 \frac{dy}{2-1} = \int_0^1 dy = 1,$$

a lo largo de CB, $y = 1$, $dy = 0$ y nos queda:

$$I_2 = \int_1^0 dx = -1.$$

La integral total a lo largo de ACB tiene como valor:

$$I = 1 - 1 = 0.$$

Este resultado es diferente al obtenido a lo largo del círculo, por tanto, la expresión inicial no es una diferencial total exacta.

47. Integración de una diferencial total de una función de dos variables. — Sea una función de dos variables independientes x y z:

$$y = f(x, z).$$

Hemos visto en el Tomo II que la diferencial total es:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

expresión en la cual $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$ son también, en el caso más general, funciones de x y de z, que llamaremos M y N, y escribiremos:

$$dy = M\,dx + N\,dz. \qquad (1)$$

— Inversamente, si tenemos una expresión de la forma anterior donde M y N son funciones de x y de z, pueden pedirnos cuál es la función $y = f(x, z)$ tal que su diferencial total es la expresión anterior. En este caso, tendríamos:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}$$

y

$$N = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Si esta función existe, la expresión (1) *es una diferencial total exacta,* cuya integral es la función $y = f(x, z)$.

En general, las funciones M y N son cualesquiera, y la expresión (1) no es una diferencial total exacta. Ya vimos en el Tomo. II que, para que la expresión (1) sea una diferencial total exacta, *basta que se cumpla:*

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En este caso, es interesante y útil el poder encontrar la función $y = f(x, z)$. Para esto, utilizaremos el método de CAUCHY, que es una... maravilla de razonamiento, y para que el lector comprenda, inmediata y claramente su mecanismo, daremos primero ejemplos, tratando después de la teoría general.

48. Ejemplos.

1.º *Dada la expresión siguiente, que es una diferencial total exacta, buscar la función* $y = f(x, z)$ *correspondiente a su integral:*

$$\frac{(x + 2z)\,dx + z\,dz}{(x + z)^2}.$$

Verifiquemos primero que se trata de una diferencial total exacta. Hagamos:

$$\frac{(x + 2z)\,dx}{(x + z)^2} + \frac{z\,dz}{(x + z)^2} = M\,dx + N\,dz.$$

Se deduce:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{(x + z)^2 2 - (x + 2z)\,2(x + z)}{(x + z)^4} = \frac{(x + z)2 - 2(x + 2z)}{(x + z)^3} = \frac{-2z}{(x + z)^3}$$

y

$$\frac{\partial N}{\partial x} = z(-2)\,(x + z)^{-3} = \frac{-2z}{(x + z)^3}$$

que son iguales:

— Calculemos ahora la función $y = f(x, z)$.

Todas las funciones de x y de z que admiten como derivada, *respecto a* x, la expresión M, son de la forma:

$$y = \int \frac{x + 2z}{(x + z)^2}\,dx + \varphi(z)$$

donde $\varphi(z)$ no contiene la variable x, *siendo tan sólo una función de* z.

Podemos escribir:

$$y = \int \frac{(x+z+z)}{(x+z)^2}\,dx + \varphi(z) = \int \frac{dx}{x+z} + z\int \frac{dx}{(x+z)^2} + \varphi(z)$$

$$= \text{Log}\,(x+z) - z\cdot\frac{1}{x+z} + \varphi(z)$$

Elijamos ahora la función $\varphi(z)$, para que la derivada de y respecto a z sea precisamente igual a N. Derivemos respecto a z e igualemos esta derivada con N:

$$\frac{1}{x+z} - \left[\frac{(x+z)-z}{(x+z)^2}\right] + \varphi'(z) = \frac{z}{(x+z)^2}$$

$$\frac{x+z-x}{(x+z)^2} + \varphi'(z) = \frac{z}{(x+z)^2}$$

de donde:

$$\varphi'(z) = 0$$

por tanto:

$$\varphi(z) = \text{C}^{te} = \text{C}$$

es decir, no contiene z (ni x).

Tendremos, finalmente:

$$y = f(x,z) = \text{Log}\,(x+z) - \frac{z}{x+z} + \text{C},$$

que es la integral buscada.

2.° *La expresión* $z^2dx + (x^2 - 2xz)dz$ *no es una diferencial total total exacta. Averiguar si se la puede transformar en una diferencial total exacta, multiplicándola por un factor* α *que sería función de* x *solamente.*

Si esto es posible, el nuevo coeficiente de dx *será* αz^2, y la expresión anterior se escribe:

$$\alpha z^2\,dx + \alpha(x^2 - 2xz)dz = \text{M}\,dx + \text{N}\,dz$$

Deberemos tener:

$$\frac{\partial \text{M}}{\partial z} = \frac{\partial \text{N}}{\partial x},$$

de donde:

$$\frac{\partial(\alpha z^2)}{\partial z} = \frac{\partial[\alpha(x^2 - 2xz)]}{\partial x},$$

es decir:

$$2\alpha z = (x^2 - 2xz)\alpha' + \alpha(2x - 2z)$$

o bien:

$$-2\alpha(x-2z) = (x^2-2xz)\alpha'$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{-2(x-2z)}{x(x-2z)} = -\frac{2}{x}.$$

Integrando:

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha} = -\int \frac{2dx}{x} + \text{Log C}$$

$$\text{Log } \alpha = -2 \text{ Log } x + \text{Log C} = \text{Log } x^{-2} + \text{Log C}$$

o bien:

$$\alpha = \frac{C}{x^2}$$

que es el fator buscado.

Operando como en el primer ejemplo, encontraríamos que la función $y = f(x, z)$ es:

$$y = C\left(-\frac{z^2}{x} + z + K\right),$$

que el lector puede verificar.

Observación: El factor α que hemos utilizado en el ejemplo anterior, con objeto de transformar una diferencial total cualquiera en diferencial total exacta, se llama, **«factor integrante»**.

— Hagamos el último ejemplo.

3.° *La expresión siguiente, no es una diferencial total exacta:*

$$(x^2z + z^2 + 2xz)dx + (x^2 + x)(x + 2z)dz.$$

Buscar un factor α, función de x solamente, de tal modo que, al multiplicar la expresión anterior por α se convierta en una diferencial total exacta. En este caso, encontrar la función:

$$y = f(x, z).$$

Hagamos:

$$M = x^2z + z^2 + 2xz$$
$$N = (x^2 + x)(x + 2z)$$

lo cual nos da $Mdx + Ndz$.

Pero:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = x^2 + 2z + 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2x + 4xz + 2z,$$

y como estas cantidades no son iguales, la expresión no es una diferencial total exacta.

Multipliquemos ahora la expresión propuesta por α, que es función de x, de modo que:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha M) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha N)$$

o también, ya que α depende sólo de x:

$$\alpha \frac{\partial M}{\partial z} = N \frac{d\alpha}{dx} + \alpha \frac{\partial N}{\partial x}$$

lo cual nos da:

$$\alpha(x^3 + 2z + 2x) = (x^2 + x)(x + 2z)\frac{d\alpha}{dx} + \alpha(3x^2 + 2x + 4xz + 2z)$$

o bien:

$$0 = (x^3 + x)(x + 2z)\frac{d\alpha}{dx} + \alpha(2x^2 + 4xz)$$

$$0 = (x^3 + x)\frac{d\alpha}{dx} + 2\alpha x,$$

dividiendo por x:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{-2dx}{1 + x}.$$

Integrando:

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha} = -2\int \frac{dx}{1 + x} + \text{Log K}$$

$$\alpha = \frac{K}{(1 + x)^2}.$$

Como K es una constante y nosotros buscamos df, basta hacer $K = 1$, de donde:

$$df = \frac{x^2z + z^2 + 2xz}{(1 + x)^2}dx + \frac{x(x + 2z)}{1 + x}dz = M\,dx + N\,dz.$$

— Calculemos ahora la función $y = f(x, z)$.

Tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x(x + 2z)}{1 + x}$$

y al integrar respecto a z, tenemos que añadir una constante respecto a z, es decir, *una función que dependa solamente de* x:

$$y = \int \frac{x^2\,dz}{1+x} + \int \frac{2xz}{1+x}\,dz + \varphi(x) = \frac{x^2z}{1+x} + \frac{xz^2}{1+x} + \varphi(x). \quad (1)$$

Ahora tenemos que determinar $\varphi(x)$, para que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sea igual a M, por tanto:

$$M = \frac{x^2z + z^2 + 2xz}{(1+x)^2}.$$

Derivemos la fórmula (1) respecto a x, haciendo pasar $\varphi'(x)$ a la izquierda:

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi'(x) = \frac{(1+x)(2xz+z^2) - (x^2z + xz^2)}{(1+x)^2} = \frac{x^2z + 2xz + z^2}{(1+x)^2},$$

observaremos que esta última expresión es, precisamente, igual a $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, es decir a M, y nos queda entonces:

$$\varphi'(x) = 0 \qquad \text{de donde} \qquad \varphi(x) = C.$$

Tendremos, finalmente, tomando la ecuación (1):

$$y = \frac{x^2z + xz^2}{1+x} + C = \frac{xz(x+z)}{1+x} + C.$$

— Después de hacer estos ejemplos, es necesario generalizar y estudiar la teoría de la integración de las diferenciales totales. Pero antes estudiaremos la cuestión clásica de la diferenciación bajo el signo $\int$, que nos será útil después.

49. Diferenciación bajo el signo integral.

— Supongamos que hay que calcular la integral $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$, donde α es un parámetro cualquiera que no contiene x. El resultado de la integral, después de pasar a los límites, no dependerá de x, sino de a, de b y de α. Llamemos $F(\alpha)$ al resultado de esta integración.

Pero podemos calcular la derivada respecto a α de la cantidad que está bajo el signo $\int$ *sin conocer la expresión* F.

— En efecto, demos a α una variación $\Delta\alpha$ y multipliquemos los dos miembros por $\Delta\alpha$, con lo que tenemos:

$$F(\alpha) \cdot \Delta\alpha = \int_a^b f(x, \alpha)\, \Delta\alpha\, dx.$$

Restando cantidades iguales de los dos miembros, podremos escribir la igualdad siguiente:

$$\frac{F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{[f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]}{\Delta\alpha}\, dx,$$

si ahora $\Delta\alpha$ tiende hacia cero, el límite será:

$$F'(\alpha) = \int_a^{\cdot} f'_\alpha(x, \alpha),$$

obteniendo la fórmula de la derivación bajo el signo integral:

$$\boxed{\left[\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right]' = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx}$$

Por tanto, para obtener la derivada de una integral definida respecto a un parámetro, basta tomar la integral respecto a la variable de integración, de la derivada de la cantidad que está bajo el signo integral, respecto a dicho parámetro.

Ejemplo. — Sea $\int_0^\pi \text{Log}\,(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx.$

— Derivemos, llamando $F(\alpha)$ al resultado de la integral:

$$I = F'_\alpha = \int_0^\pi \frac{1}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} (2\alpha - 2 \cos x)\, dx.$$

Multipliquemos la integral I por α:

$$\alpha I = \int_0^\pi \frac{(-2\alpha \cos x + 2\alpha^2)}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}\right) dx + \int_0^\pi \frac{(-1 + \alpha^2)\, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}$$

$$= \pi + \int_0^\pi \frac{(\alpha^2 - 1)\, dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}$$

Expresemos todo en función de $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$:

$$\alpha I = \alpha F'_\alpha = \pi + \int_0^\infty \frac{(\alpha^2 - 1)\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1 - 2\alpha\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) + \alpha^2}$$

$$= \pi + \int_0^\infty \frac{2(\alpha^2 - 1)\,dt}{t^2(\alpha+1)^2 + (\alpha-1)^2}$$

Hagamos:

$$t(\alpha + 1) = (\alpha - 1)u$$

de donde:

$$\alpha F'_\alpha = \pi + 2\int \frac{(\alpha^2-1)\cdot\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\,du}{(\alpha-1)^2(u^2+1)} = \pi + 2\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \pi + 2\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

y

$$F'_\alpha = \frac{2\pi}{\alpha}$$

integrando, tendremos $F(\alpha)$:

$$F(\alpha) = 2\pi \operatorname{Log} K\alpha, \qquad (\text{siendo } \alpha > 0)$$

Lo cual nos muestra que se puede conocer la integral definida sin conocer la función primitiva correspondiente.

La derivación bajo el signo integral, da un medio de encontrar nuevas integrales. Por ejemplo:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha} \qquad (\text{siendo } \alpha > 0)$$

derivando respecto a α obtenemos:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\cdot \operatorname{Log} x\,dx = -\frac{1}{\alpha^2},$$

del mismo modo:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(\operatorname{Log} x)^2\,dx = \frac{1\cdot 2}{\alpha^3}, \qquad \text{etc.}$$

50. Teoría general de la integración de diferenciales totales. — Sea la expresión:

$$M\,dx + N\,dz, \tag{1}$$

donde M y N son funciones de x y de z.

Hemos visto más arriba que si:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

tenemos una diferencial total exacta, y esta condición es necesaria y suficiente. La expresión (1) es por tanto, integrable: busquemos su integral $f(x, z)$.

Integrando respecto a x el primer término de la expresión (1), tendremos:

$$\int M\,dx = F(x, z)$$

añadiendo una constante desconocida, o mejor *una expresión que dependa solamente de z,* y que llamaremos $\varphi(z)$.

Podremos ahora decir que $F(x, z) + \varphi(z)$ será la integral de la expresión (1), *con la condición de que al tomar la derivada respecto a z, encontremos* N. Debemos por tanto tener:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \varphi'(z) = N$$

de donde:

$$\varphi'(z) = N - \frac{\partial F}{\partial z}$$

y

$$\varphi(z) = \int \left(N - \frac{\partial F}{\partial z}\right) dz$$

siempre que $\left(N - \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ no contenga x, conforme a la hipótesis inicial. Esto exige que la derivada de $\left(N - \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ respecto a x sea nula, por tanto:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} = 0,$$

pero como:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial z},$$

la condición final será:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}$$

como ya hemos visto. Y la integral buscada será:

$$\boxed{f(x, z) = \mathrm{F}(x, z) + \int \left(\mathrm{N} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\right) dz + \mathrm{C}} \qquad (2)$$

Ejemplo: Supongamos que hay que integrar:

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{x^2 + z^2} = \mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dz.$$

— Es fácil verificar que $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$, busquemos por tanto la función $f(x, z)$.

Integrando $\mathrm{M}\,dx$ respecto a x:

$$\int z \frac{dx}{x^2 + z^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{z} = \mathrm{F}(x, z),$$

por otra parte, tenemos:

$$\int \left(\mathrm{N} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\right) dz = \int \left[\frac{-x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{z^2}} \left(-\frac{x}{z^2}\right)\right] dz = 0.$$

La integral buscada será, por tanto:

$$f(x, z) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{z} + \mathrm{C}.$$

Vamos a encontrar el mismo resultado, por otro método.

51. Método de integración de Cauchy. — Frecuentemente, la integral de la fórmula (2) es difícil de calcular, por esto CAUCHY ha dado el método siguiente:

— Sea la diferencial total $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dz$.

Todas las funciones de dos variables $f(x, z)$, que tienen a M como derivada respecto a x, vienen dadas por:

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{M}\,dx + \varphi(z)$$

donde $\varphi(z)$ es una expresión que contiene solamente z y no contiene x. Es necesario, por tanto, que al derivar respecto a z se encuentre

N: Derivemos respecto a z, aplicando la regla de la derivación bajo el signo $\int$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial z}\, dx + \varphi'(z) = N(x, z)$$

donde x_0 es un límite fijo cualquiera. Pero, como:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

podemos escribir:

$$N(x, z) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\, dx + \varphi'(z) = \Big[N \Big]_{x_0}^{x} + \varphi'(z)$$

o bien:

$$N(x, z) = N(x, z) - N(x_0, z) + \varphi'(z).$$

Simplificando nos queda:

$$N(x_0, z) = \varphi'(z),$$

de donde, integrando:

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} N(x_0, z)\, dz.$$

La integral buscada será:

$$\boxed{f(x, z) = \int_{x_0}^{x} M(x, z)\, dx + \int_{z_0}^{z} N(x_0, z)\, dz}$$

donde x_0 y z_0 son valores arbitrarios. Al integrar el primer término, se considera z como constante, y *en el segundo se sustituye* x *por* x_0, naturalmente esta segunda integral se efectúa sobre una *función que depende de* z *solamente* (en efecto, pasando al límite inferior z_0, tendremos una expresión que contenga sólo x_0 y z_0, siendo en realidad una constante).

— Apliquemos esta teoría al ejemplo anterior, resuelto mediante la ecuación (2).

Ejemplo. Integrar:

$$\frac{z\, dx - x\, dz}{x^2 + z^2} = M\, dx + N\, dz.$$

Tenemos inmediatamente:

$$f(x, z) = \int_{x_0}^{x} \frac{z\,dx}{x^2 + z^2} - \int_{z_0}^{z} \frac{x\,dz}{x^2 + z^2}$$

$$= \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{z} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x_0}{z}\right) - \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{z}{x_0} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x_0}{z}\right)$$

pero:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{z}{x_0} = \operatorname{arc\,cotg} \frac{x_0}{z}$$

y este arco sumado al arco cuya tangente es $\frac{x_0}{z}$ nos da un número entero de cuadrantes que se suman a la cantidad *constante* arc tg $\frac{z_0}{x_0}$.

El resultado final es:

$$f(x, z) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{z} + C$$

resultado idéntido al encontrado por el primer método de la fórmula (2).

Observación. — Hay que observar que, en realidad, en la fórmula de CAUCHY, la elección del valor x_0 es completamente arbitraria y que esta elección se hará de tal modo que se simplifique el cálculo de N; la constante final C muestra que la solución es indeterminada, mientras no se fijen condiciones suplementarias.

El ejemplo siguiente ayudará a comprender esto.

Segundo ejemplo. La expresión siguiente:

$$\left(e^{x+z} - \frac{1}{x+z} + \frac{z}{1+x^2z^2}\right) dx + \left(e^{x+z} - \frac{1}{x+z} + \frac{x}{1+x^2z^2} + 1\right) dz$$

es una diferencial total exacta. Encontrar la integral $f(x, z)$.

— La fórmula de CAUCHY nos da, inmediatamente:

$$f(x, z) = \int_{x_0}^{x} \left(e^{x+z} - \frac{1}{x+z} + \frac{z}{1+x^2z^2}\right) dx$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \left(e^{x+z} - \frac{1}{x+z} + \frac{x}{1+x^2z^2} + 1\right) dz.$$

Elijamos x_0 de tal modo que se simplifique el cálculo de la segunda integral, por ejemplo, $x_0 = 0$, y $z_0 = 1$; nos queda entonces:

$$f(x, z) = \int_0^x M\,dx + \int_1^z \left(e^z - \frac{1}{z} + 1\right) dz$$

$$= \left(e^{x+z} - e^z - \operatorname{Log} \frac{x+z}{z} + \operatorname{arc\,tg}\, xz\right) + (e^z - \operatorname{Log} z + z) + C$$

$$= e^{x+z} + \operatorname{arc\,tg}\, xz - \operatorname{Log}(x+z) + z + C$$

que es la integral buscada. Contiene una constante, lo cual demuestra que x_0 y z_0 pueden ser absolutamente cualesquiera.

Observación. — La integración de las diferenciales totales y el estudio de las diferenciales totales exactas se emplean constantemente en Termodinámica.

CAPITULO VI

INTEGRALES MULTIPLES

I - INTEGRALES DOBLES

52. Definición. — Hemos visto en el Tomo III que una integral representa una superficie, y que esta superficie es el límite de una suma de rectángulos infinitamente pequeños. Vamos a comprobar que una integral doble representa un volumen, aunque en ciertos casos una integral doble permite también calcular una superficie.

— Sea una función de dos variables independientes:

$$y = f(x, z)$$

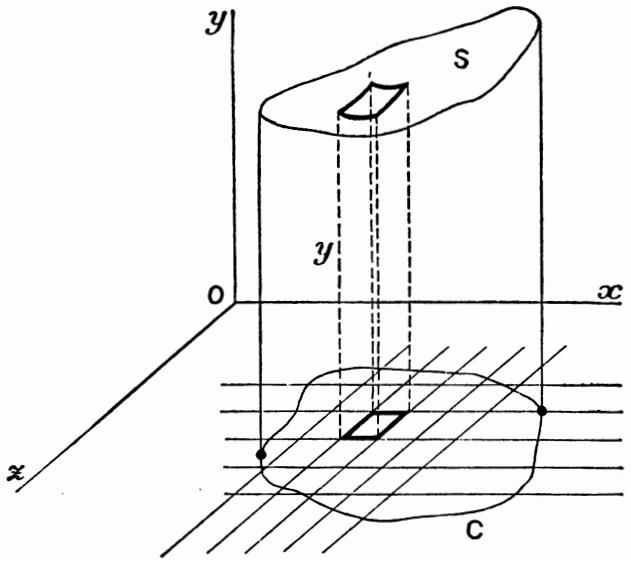

FIG. 63

y supongamos tres planos perpendiculares entre sí, formando un triedro, por ejemplo, el ángulo en el vértice de un cubo. La figura 63 representa, en perspectiva, el plano xOz que es el plano horizontal, y en este plano, supongamos que x y z varían entre ciertos límites, por ejemplo, en el dominio de la curva C.

A cada valor de x y de z, le corresponde un valor de y dado por la función $y = f(x, z)$.

Cortemos la curva C por medio de líneas paralelas a los dos ejes y separadas distancias iguales, unas a distancia dx y otras a distancia dz, con lo que obtenemos rectángulos infinitamente pequeños. Llamemos dA a la superficie de uno de ellos:

$$dA = dx \cdot dz.$$

Podemos considerar que el valor de y correspondiente a un valor de x y de z dados, representa la altura de un prisma de base dA y que tiene una sección infinitamente pequeña. El conjunto de los diferentes valores de y representa, por tanto, en la parte superior, una cierta superficie S en el espacio, superficie que tendrá cumbres y valles.

Pero, la expresión:

$$y \cdot dA \qquad \text{o bien} \qquad y \cdot dx \cdot dz$$

representa el volumen dV de este prisma elemental (o por lo menos su parte principal). Y si sumamos los volúmenes de todos estos prismas, tendremos el volumen total limitado abajo por la curva C y arriba por la superficie S.

— Este volumen se representa *simbólicamente* por la expresión siguiente, con dos signos $\int$ juntos (apareciendo dos diferenciales, dx y dz):

$$V = \int\int_C y \cdot dx\, dz \qquad \text{o bien} \qquad \int\int_C f(x, z)\, dx\, dz$$

y se pronuncia: «*Integral doble, extendida a la curva* C, *de* $y\, dx\, dz$.»

Se escribe dos veces el signo $\int$, ya que, según veremos, para calcular una integral doble hay que hacer dos integraciones sucesivas.

53. Cálculo de una integral doble. — Basta calcular el volumen de base C y limitado en su parte superior por la superficie S, cuya ordenada en cada punto es:

$$y = f(x, z).$$

Cortemos el volumen por dos planos paralelos al plano xOy de la figura, y distantes el uno del otro dz (fig. 64). Determinamos así el volumen de una rebanada de anchura dz, cuya parte principal es un paralelepípedo igual a:

$$dV = \text{superficie ABED} \cdot dz.$$

Pero:

$$\text{Superficie ABED} = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx$$

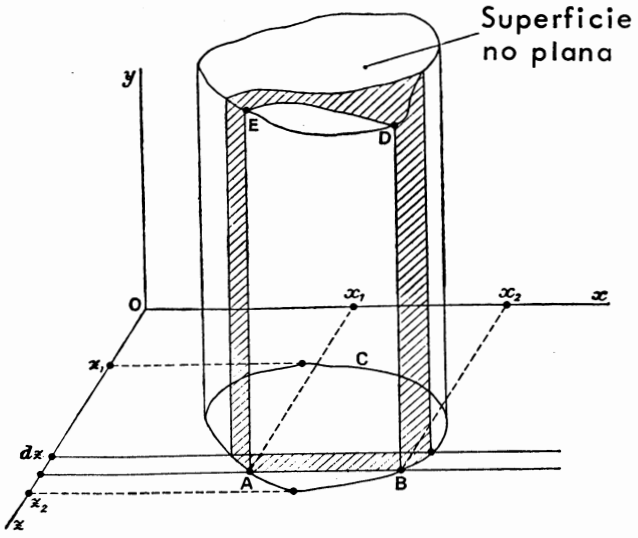

FIG. 64

donde z es constante, como lo muestra la figura, pero en los límites x_1 y x_2 dependen de z, ya que x y z están ligados entre sí por la ecuación de la curva C.

El resultado de esta primera integral dependerá de z por dos razones: primero porque z figura en esta integral en la expresión de y, segundo porque los límites x_1 y x_2 dependen de z, que es la abscisa de la rebanada paralelepipédica considerada. La integral anterior se integra fácilmente, siendo x la variable (tenemos dx) y suponiendo z constante. El resultado de esta integral será, por tanto, una función de z solamente, después de pasar a los límites:

$$\text{Superficie ABED} = \varphi(z)$$

El volumen de la rebanada de anchura dz será:

$$dV = \varphi(z) \cdot dz$$

y el volumen total:

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) \cdot dz$$

siendo z_1 y z_2, los límites de z, de acuerdo con la figura. Finalmente, escribiremos de un modo condensado:

$$\boxed{V = \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} y \, dx \, dz}$$

que se pronuncia: «*Integral de* z_1 *a* z_2 *de integral de* x_1 *a* x_2 *de* $y \, dx \, dz$.»

— Para efectuar esta integral doble se calcula primeramente la integral interior:

$$\int_{x_1}^{x_2} y \, dx,$$

después se multiplica el resultado por dz y se integra después respecto a z. Podemos imaginar el conjunto de estas dos operaciones sucesivas, mediante el esquema siguiente:

$$\text{Volumen} = \boxed{\int_{z_1}^{z_2} \boxed{\int_{x_1}^{x_2} y \, dx} \, dz}$$

En resumen, una integral doble se reduce a dos integrales simples sucesivas, pero sin olvidar que, cuando se integre respecto a una variable, la otra variable debe considerarse como constante.

54. Observación sobre el modo de escribir una integral doble. — En la explicación anterior hemos visto que los límites de x eran x_1 y x_2 y que los límites de z eran z_1 y z_2. En este caso no hay ambigüedad sobre los límites de cada variable.

Pero en la integral siguiente, en la que no se precisa nada:

$$I = \int_0^1 \int_1^2 y \, dx \, dz,$$

¿Cuáles son los límites de x? ¿Son 0 y 1 o bien 1 y 2? ¿Cuáles son los límites de z?

Puede ocurrir que en un problema particular o según una figura, se sepa claramente cuáles son los límites de x y de z, pero este caso es raro. En el ejemplo anterior, si no se indica, no se sabe cuáles son los límites de cada variable.

Por tanto, para evitar toda ambigüedad, se ha decidido que la integral doble debe escribirse en un orden tal que la integral de izquierda se refiere a la diferencial de izquierda y que la integral de derecha se refiere a la diferencial de derecha. En resumen: *el orden de las diferenciales debe seguir el orden de las integrales.*

Así, en la integral anterior, dx se refiere a la primera integral, donde x varía desde 0 hasta 1, y dz se refiere a la segunda integral donde z varía de 1 a 2.

¿Se puede invertir el orden de las integraciones? Es decir, ¿se puede comenzar por integrar respecto a x y hacer luego la integración respecto a z, o bien integrar en primer lugar respecto a z y hacer después la integración respecto a x?

Se demuestra (aunque la demostración queda fuera del campo y del espíritu de esta obra) que el orden de las integraciones es *indiferente*. Se puede operar como se quiera: el resultado es el mismo, como verificaremos enseguida.

Comencemos por dos ejemplos sencillos, explicados en detalle, antes de pasar al cálculo de volúmenes complicados.

55. Ejemplos de integrales dobles.

1.º $$I = \int_0^1 \int_1^2 x^2\, dx\, dz.$$

— Según hemos dicho antes, x varía desde 0 hasta 1, y z varía desde 1 hasta 2. Calculemos en primer lugar la integral de la derecha (en la cual x es constante):

$$\int_1^2 x^2\, dz = x^2 \int_1^2 dz = x^2 [z]_1^2 = x^2(2-1) = x^2.$$

Multipliquemos por dx e integremos desde 0 hasta 1:

$$\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Cambiemos el orden de las integraciones y comencemos primero por la integral de izquierda con dx, y donde z es constante:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Multipliquemos ahora por dz y calculemos la integral de la derecha:

$$\int_1^2 \frac{1}{3}\,dz = \frac{1}{3}\,[z]_1^2 = \frac{1}{3}.$$

El resultado es el mismo.

2.° *Integrar:*

$$I = \int_0^a \int_0^2 x^2 z\,dx\,dz$$

donde a es un límite cualquiera.

—La integral de izquierda desde 0 hasta a se refiere a dx y la integral de derecha desde 0 hasta 2 se refiere a dz. Por tanto, esta integral debe entenderse del modo siguiente:

$$I = \boxed{\int_0^a \boxed{\int_0^2 x^2 z\,dz}\,dx}$$

Calculemos primero la integral interior, en la que x es constante:

$$\int_0^2 x^2 z\,dz = x^2 \int_0^2 z\,dz = x^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \frac{x^2}{2}\,[4-0] = 2x^2.$$

Multipliquemos por dx e integremos desde 0 hasta a:

$$\int_0^a 2x^2\,dx = \frac{2}{3}\,[x^3]_0^a = \frac{2a^3}{3}$$

—Invirtamos ahora el orden de las operaciones, comenzando por la integral de izquierda, en la que z es constante:

$$\int_0^a x^2 z\,dx = z\int_0^a x^2\,dx = z\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = z\,\frac{a^3}{3}.$$

Multipliquemos por dz e integremos desde 0 hasta 2:

$$\int_0^2 z\frac{a^3}{3}\,dz = \frac{a^3}{3}\int_0^2 z\,dz = \frac{a^3}{3}\cdot\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \frac{a^3}{6}[4-0] = \frac{2a^3}{3}$$

resultado idéntico al anterior.

3.° *Integrar:*

$$I = \int_0^1 \int_x^{2-x} z^2\,dz\,dx.$$

— Calculemos primero la integral izquierda con dz, en la que z varía desde 0 hasta 1 y en la que x es constante:

$$\int_0^1 z^2\,dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

después, multipliquemos por dx e integremos desde x hasta $2-x$:

$$\int_x^{2-x} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}[x]_x^{2-x} = \frac{1}{3}[2-x-x] = \frac{2}{3}(1-x).$$

— Operemos de un modo inverso, comenzando por la integral derecha con dx, en la que x varía desde x hasta $2-x$, siendo z constante:

$$\int_x^{2-x} z^2\,dx = z^2\int_x^{2-x} dx = z^2[x]_x^{2-x} = z^2[2-x-x] = z^2(2-2x).$$

Multipliquemos ahora por dz e integremos de 0 a 1:

$$\int_0^1 z^2(2-2x)dz = 2(1-x)\int_0^1 z^2\,dz = 2(1-x)\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(1-x),$$

resultado idéntico al anterior.

Ahora que el lector ha comprendido, según esperamos, el cálculo de una integral doble, por estos tres ejemplos, pasemos a ejemplos más complicados, es decir, al cálculo de volumenes cualesquiera.

4.° *Calcular el volumen del paralelepípedo de la figura* 65 *cuya base es un cuadrado de lado igual a* 1 *y cuya altura viene dada en cada punto por:*

$$y = x^2 + z^2 + 1$$

y que representa una superficie en el espacio.

El volumen es:

$$V = \int_0^1 \int_0^1 y \cdot dx \cdot dz = \int_0^1 dz \int_0^1 y\, dx.$$

Calculemos primero la integral derecha:

$$\int_0^1 y\, dx = \int_0^1 (x^2 + z^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + z^2 x + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + z^2 + 1 = \frac{4}{3} + z^2.$$

Multipliquemos por dz e integremos desde 0 hasta 1:

$$V = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} + z^2\right) dz = \frac{4}{3}[z]_0^1 + \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

que es el volumen pedido. El lector puede ejercitarse en verificar que obtiene el mismo resultado al invertir el orden de las integrales.

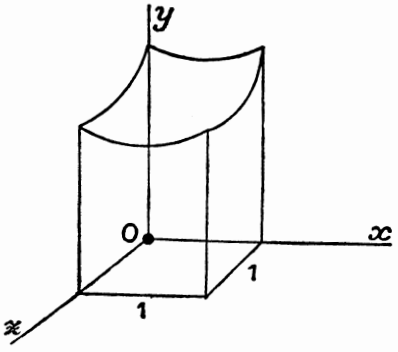

FIG. 65

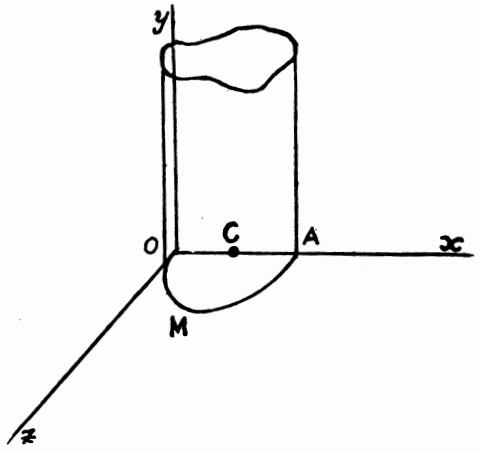

FIG. 66

5.° *Calcular el volumen limitado en su base por el semicírculo* OMA, *en el plano* xOz, *cuyo diámetro es* $AO = 2$, *y limitado en la parte superior por la superficie* $y = x^2 z$ (fig. 66).

— Tenemos la fórmula general del volumen:

$$V = \iint y\, dx\, dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1}} x^2 z\, dx\, dz,$$

siendo los límites de x, 0 y 2.

Para tener los límites de z, busquemos primero la ecuación del círculo. Tomemos un punto P cualquiera (fig. 67) cuyas abscisas son:

$$OB = x \quad \text{y} \quad BP = z$$

siendo recto el ángulo en B. El triángulo CBP da:

$$(x-1)^2 + z^2 = R^2 = 1$$

o bien:

$$x^2 - 2x + z^2 = 0$$

y

$$z = \sqrt{2x - x^2}.$$

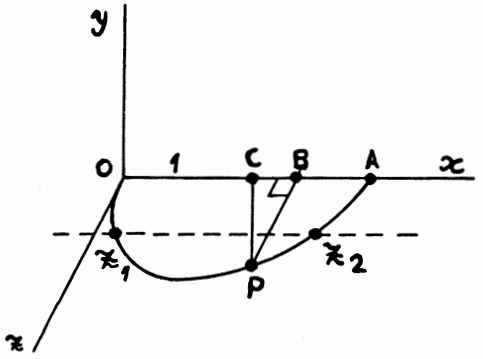

FIG. 67

Vemos por tanto que cuando el punto P se desplaza sobre el círculo entre el punto O y el punto P, z variará desde 0 hasta $z = \sqrt{2x - x^2}$. Tomando la integral derecha con dz, tendremos:

$$\int_0^{z_1} y\,dz = \int_0^{z_1} x^2 z\,dz = x^2 \int_0^{z_1} z\,dz = \frac{x^2}{2}\,[z^2]_0^{z_1} = \frac{x^2}{2}\,[(2x - x^2) - 0] = x^3 - \frac{x^4}{2}.$$

Multipliquemos por dx e integremos desde 0 hasta 2, de donde:

$$V = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right]_0^2 = \left[\frac{(2^4 - 0)}{4} - \frac{(2^5 - 0)}{10}\right] = 0{,}8$$

que es el valor del volumen buscado.

Vemos cómo hay que buscar los límites de z en la primera integral, cuando se tiene una curva de forma cualquiera en el plano horizontal.

6.° *Calcular el volumen del cilindro limitado en su base por la semiparábola* $z^2 = 2x$ *(para* $z \geqslant 0$*), y la recta* $x = 1$*, y limitado en la parte superior por la superficie* $y = x^2 + z^2 + 1$ (fig. 68).

—Un punto P cualquier de la semiparábola tiene por coordenadas x y $z = \sqrt{2x}$.

El volumen será:

$$V = \iint y\,dx\,dz = \int_0^1 \int_0^{z_2} (x^2 + z^2 + 1)\,dx\,dz.$$

donde: $z_2 = z = \sqrt{2x}$.

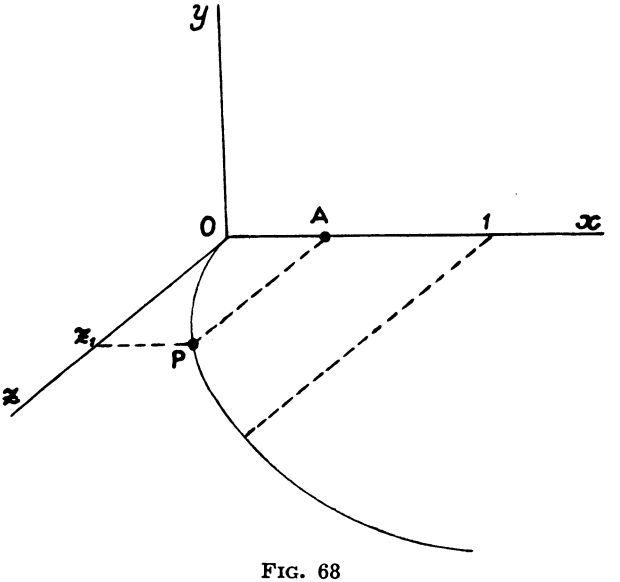

FIG. 68

Integremos primero sobre z, suponiendo x constante.

$$\int_0^{\sqrt{2x}} (x^2 + z^2 + 1)dz = \left[x^2 z + \frac{z^3}{3} + z\right]_0^{\sqrt{2x}} = x^2\sqrt{2x} + \frac{1}{3}(\sqrt{2x})^3 + \sqrt{2x}$$

$$= \sqrt{2}\,x^{\frac{5}{2}} + \frac{(\sqrt{2})^3}{3}x^{\frac{5}{2}} + \sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}.$$

Multipliquemos ahora por dx e integremos desde 0 hasta 1:

$$V = \int_0^1 \left[\sqrt{2}\,x^{\frac{5}{2}} + \frac{(\sqrt{2})^3}{3}x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}\right]dx = \left[\sqrt{2}\,\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{\sqrt{2}^3}{3}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \sqrt{2}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{7} + \frac{2(\sqrt{2})^3}{15} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right) = 1{,}7.$$

7.° *Sea un triedro y un plano que corta las tres aristas de dicho triedro* (fig. 69). *En geometría analítica se demuestra que la ecuación del plano es:*

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}+\frac{y}{c}=1.$$

Calcular el volumen del triedro determinado por dicho plano

— Tenemos:

$$V=\int\int y\,dx\,dz=$$

$$\int\int c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{z}{b}\right)dx\,dz.$$

Calculemos primero $\int y\,dx$, para z constante, variando x desde 0 hasta x_1, donde:

$$x_1=a\left(1-\frac{z}{b}\right).$$

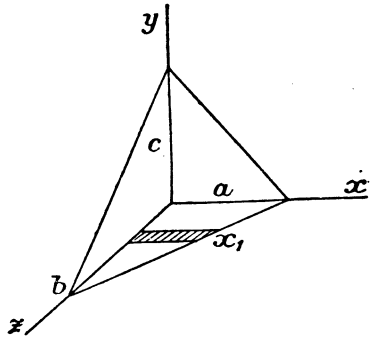

FIG. 69

Tenemos:

$$\int y\,dx=c\int_0^{x_1}\left(1-\frac{z}{b}-\frac{x}{a}\right)dx=c\left[\left(1-\frac{z}{b}\right)x-\frac{x^2}{2a}\right]_0^{x_1}$$

$$=c\left[a\left(1-\frac{z}{b}\right)^2-\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{b}\right)^2\right]=\frac{ac}{2}\left(1-\frac{z}{b}\right)^2=\varphi(z),$$

y

$$V=\int_0^b\varphi(z)\,dz=\frac{ac}{2}\int_0^b\left(1-\frac{z}{b}\right)^2dz=\frac{abc}{6}\left[\left(\frac{z}{b}-1\right)^3\right]_0^b=\frac{1}{6}abc.$$

56. Cálculo de una superficie plana por medio de una integral doble. — Consideremos, por ejemplo, en la figura 70, una curva cerrada cuya superficie queremos calcular. Llamaremos S a dicha superficie. Vamos a ver que la superficie S se calcula fácilmente, por medio de una integral doble.

— Tracemos líneas paralelas a los dos ejes, que disten entre sí dx y dy respectivamente (dx puede ser o no igual a dy). Naturalmente estas líneas paralelas están infinitamente próximas unas de otras ya que utilizamos el lenguaje diferencial.

Estas líneas determinan rectángulos (o cuadrados), y si dx y dy son infinitamente pequeños, su suma dará la superficie S (o al menos su parte principal).

Coloquémonos en un punto P de la curva, cuya ordenada es y_1 y consideremos el punto M colocado sobre la misma vertical, que tendrá una ordenada y_2. Tomemos ahora uno de estos rectángulos, por ejemplo, el que está marcado en negro en la figura: su superficie es $dx.dy$. La superficie de la rebanada dx y de altura PM será:

$$dS = \int_{y_1}^{y_2} dx\, dy \qquad \text{(donde } x \textit{ es constante}\text{)}.$$

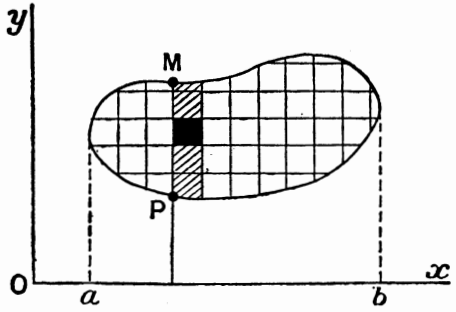

FIG. 70

La superficie total de la curva cerrada se obtendrá sumando todas las rebanadas verticales, de igual anchura dx, es decir, integrando respecto a x, donde x varía desde a hasta b:

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} dx\, dy$$

expresión en la cual y_1 e y_2 son funciones de x, y donde a y b son los límites extremos de x. Suponemos, naturalmente, que conocemos la ecuación del perfil de la curva

$$y = f(x).$$

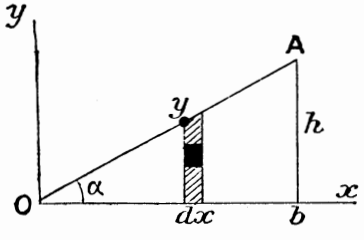

FIG. 71

57. Ejemplos de cálculo de superficies.

1.° *Calcular la superficie de un triángulo rectángulo* (fig. 71).

— La ecuación de la recta OA es:

$$y = ax \qquad (\text{donde } a = \operatorname{tg} \alpha).$$

Tomemos una pequeña rebanada de anchura dx y de altura y. La superficie es:

$$dS = \int_0^y dy\, dx \qquad (\text{donde } x \text{ es constante})$$

$$= dx \int_0^y dy = dx[y - 0]$$

$$= y\, dx,$$

y la superficie total del triángulo se obtiene integrando respecto a x, donde x varía desde 0 hasta b:

$$S = \int_0^b y\, dx = \int_0^b ax\, dx = \left[\frac{ax^2}{2}\right]_0^b$$

$$= \frac{ab^2}{2} = \frac{1}{2} b(ab)$$

$$= \frac{1}{2} bh.$$

Fórmula ya conocida.

Este cálculo no tiene, evidentemente, ningún interés, pero lo damos como ejemplo sencillo del mecanismo de cálculo.

2.° *Calcular la superficie de un círculo* (fig. 72).

— Sea el círculo $x^2 + y^2 = R^2$. Tomemos una pequeña rebanada vertical, de anchura dx y altura AB. Calculemos las ordenadas de los dos puntos A y B. Tenemos:

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

de donde:

$$y_B = + \sqrt{R^2 - x^2}$$

y

$$y_A = - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

La superficie de esta rebanada de anchura dx será:

$$dS = \int_{y_A}^{y_B} dx\, dy$$

(donde x *es constante*)

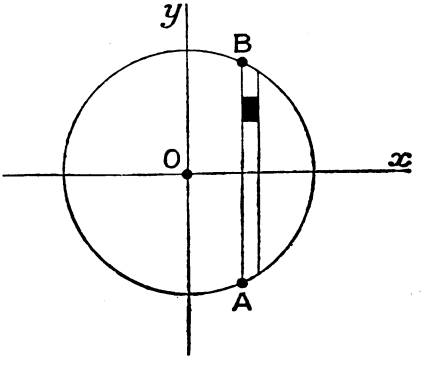

FIG. 72

o también:

$$= 2\int_0^{y_B} dx\,dy = 2dx\int_0^{y_B} dy$$

$$2dx \cdot y_B = 2dx\sqrt{R^2 - x^2},$$

y la superficie total se obtendrá integrando respecto a x, donde x varía desde $-R$ hasta $+R$:

$$S = \int_{-R}^{+R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx,$$

expresión que ya integramos en el Tomo III, para el cálculo de superficies de curvas, y que daba πR^2. Tendremos:

$$S = \int_{-R}^{+R}\int_{y_A}^{y_B} dx\,dy = \pi R^2$$

o bien:

$$S = 4\int_0^{R}\int_0^{y_B} dx\,dy = \pi R^2.$$

3.° *Calcular la superficie comprendida entre la recta* $y = x$ *y la cnrva* $y^2 = x^3$, *en la región superior al eje de las* x (fig. 73).

— Calculemos el punto P en que se cortan. En este punto tenemos:

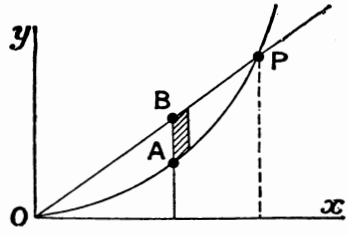

FIG. 73

$$y = x = +x^{\frac{3}{2}}$$

de donde:

$$\sqrt{x} = 1 \quad \text{y} \quad x = 1 \quad (y_P = 1).$$

Tomemos una pequeña rebanada de anchura dx y altura $y_2 - y_1$, donde:

$$y_2 = x \quad \text{e} \quad y_1 = x^{\frac{3}{2}},$$

su superficie será:

$$dS = \int_{y_1}^{y_2} dx\,dy \qquad (\text{donde } x \textit{ es constante})$$

$$= dx\int_{y_1}^{y_2} dy = dx\left[\ y\ \right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= dx[y_2 - y_1] = dx[x - x^{\frac{3}{2}}].$$

La superficie total se obtendrá integrando respecto a x, donde x varía desde 0 hasta 1:

$$S = \int_0^1 \left(x - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

Resumiendo:

$$S = \int_0^1 \int_{y_1}^{y_2} dx\, dy = \frac{1}{10}.$$

58. Cálculo de la superficie de una curva en coordenadas polares. —Supongamos una curva dada en coordenadas polares:

$$\rho = f(\theta),$$

podemos calcular la superficie de esta curva mediante una integración doble (fig. 74).

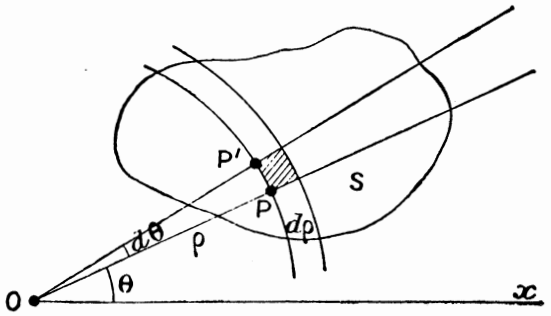

FIG. 74

—En efecto, sea P un punto interior a la curva, tal que:

$$OP = \rho$$

y sea θ el ángulo de este radio vector.

Demos un incremento $d\theta$ al ángulo. Tracemos los dos arcos de círculo de centro O, uno que pasa por P y de radio ρ, y el otro de radio $\rho + d\rho$.

Pero $d\theta$ y $d\rho$ son infinitamente pequeños, y podremos decir que la superficie rayada de la figura 74 (o al menos su parte principal)

es la de un rectángulo cuyos lados son $d\rho$ y el arco $PP' = \rho \cdot d\theta$, lo cual nos da:

$$dS = \rho\, d\rho \cdot d\theta,$$

y la suma de todas estas pequeñas superficies, extendida a la curva entera, será el *valor rigurosamente exacto* de la superficie S de la curva. Pero como ρ y θ son dos variables, tendremos una integral doble que se escribirá:

$$S = \int\int \rho\, d\rho\, d\theta$$

¿Cómo calcular esta integral? — Del mismo modo que para las integrales dobles ordinarias, hay dos formas de calcular esta nueva integral, según el orden en que se opere. Examinemos esto más en detalle.

Primer caso. — Integremos primero respecto a ρ, permaneciendo θ constante (fig. 75). Esto equivale a sumar todos los pequeños ele-

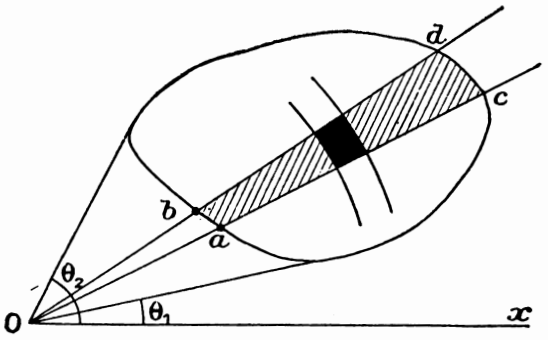

FIG. 75

mentos idénticos a nuestra pequeña superficie cuadrada inicial y comprendidos en la banda rayada *abcd*, es decir a calcular:

$$\text{Superficie del sector } abcd = \int_a^c \rho\, d\rho\, d\theta \quad \text{(siendo } \theta \text{ constante)}$$

$$= d\theta \int_a^c \rho\, d\rho.$$

Integremos ahora haciendo variar θ desde θ_1 hasta θ_2, con objeto de obtener la superficie total:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| \int_a^c \rho \, d\rho \right| \cdot d\theta$$

$$= \int_{\theta_2}^{\theta_1} \int_a^c \rho \, d\theta \, d\rho$$

donde $d\rho$ se refiere a la integral derecha y $d\theta$ a la integral izquierda (el orden de las integrales debe seguir el orden de las diferenciales).

Ejemplo. — Sea el círculo de la figura 76, donde el polo está en O. Tenemos:

$$OM = 2R \cos \theta = \rho$$

que es la ecuación del círculo en coordenadas polares.

Calculemos la superficie total del semicírculo.

— Hagamos variar ρ desde O hasta OM, dejando θ constante, el sector rayado vale:

$$\int_0^{2\,R\cos\theta} \rho \, d\rho \, d\theta = d\theta \int_0^{2\,R\cos\theta} \rho \, d\rho = d\theta \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{2\,R\cos\theta} = \frac{d\theta}{2} \cdot 4R^2 \cos^2\theta$$

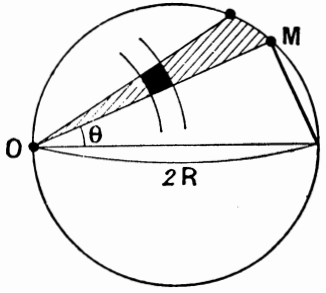

FIG. 76

Integremos ahora respecto a θ, que varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$; la superficie total será:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R^2 \cos^2\theta \, d\theta = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 2R^2 \left[\frac{1}{2}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = 2R^2 \left[\frac{\pi}{4} + 0\right] = \frac{\pi R^2}{2},$$

y la superficie del círculo entero valdrá πR^2. Tendremos finalmente:

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\theta} \rho\, d\theta\, d\rho = \pi R^2.$$

Segundo caso. — Invirtamos el orden de las integraciones y comencemos a integrar respecto a θ, dejando ρ constante (fig. 77), es decir, que tomando el punto O como centro, trazamos dos arcos de circunferencia, de radios ρ y $\rho + d\rho$, con lo que definimos la rebanada *efgh*.

Esto equivale a sumar todos los pequeños elementos, idénticos a nuestra pequeña superficie cuadrada inicial, comprendidos en la banda rayada *efgh*, es decir a calcular:

$$\text{Superficie } efgh = \int_e^f \rho\, d\rho\, d\theta \qquad (\text{donde } \rho \textit{ es constante})$$

$$= \rho\, d\rho \int_e^f d\theta = \rho\, d\rho\, [\theta_f - \theta_e],$$

siendo los límites θ_f y θ_e funciones de ρ.

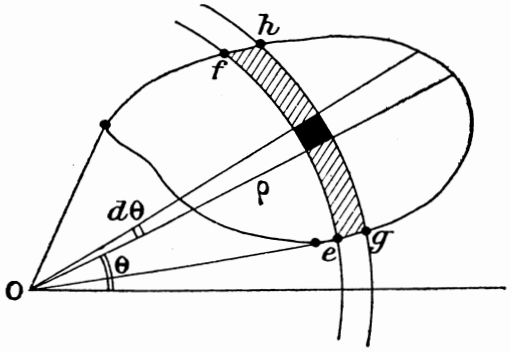

FIG. 77

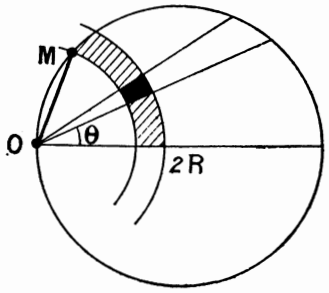

FIG. 78

Integremos ahora, haciendo variar ρ desde $\rho_1 = \rho_{min}$ hasta $\rho_2 = \rho_{max}$, lo cual nos da la superficie total:

$$S = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \boxed{\int_e^f d\theta}\ \rho\, d\rho,$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_e^f \rho\, d\rho\, d\theta$$

donde $d\rho$ se refiere a la integral izquierda y $d\theta$ a la integral derecha.

Dependiendo de los tipos de ecuaciones, operaremos de acuerdo con el primer caso o bien con el segundo caso. Así, para el ejemplo estudiado en el primer caso, esta segunda forma de integrar sería mucho menos cómoda.

La superficie rayada de la figura 78, comprendida entre los dos arcos de círculo, es:

$$dS = \int_0^{\theta_M} \rho\, d\rho\, d\theta = \rho\, d\rho \int_0^{\theta_M} d\theta = \rho\, d\rho \cdot \theta_M = \rho\, d\rho \cdot \arccos \frac{\rho}{2R}.$$

Integremos ahora respecto a ρ, que varía desde 2R hasta 0, y obtendremos la superficie del semicírculo.

$$S = \int_{2R}^{0} \rho \cdot \arccos \frac{\rho}{2R}\, d\rho.$$

Vemos que esta integral, que se calcularía por partes, es complicada y larga. Este modo de operar no es interesante para este caso. El primer modo nos conviene más.

59. Otros ejemplos en coordenadas polares.

1.° *Calcular la integral siguiente, utilizando coordenadas polares:*

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}.$$

— Sea un punto cualquiera del plano, cuyas coordenadas son x e y, y sea ρ el radio vector que va desde el polo O hasta este punto y llamemos θ al ángulo de este radio vector con el eje de las x. Tenemos, evidentemente:

$$x = \rho \cos \theta \qquad \text{y} \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

de donde:

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Además, un elemento de superficie $dx\, dy$ en coordenadas cartesianas, sería $\rho\, d\rho\, d\theta$ expresado en coordenadas polares.

— Busquemos los nuevos límites; son 0 y $\frac{\pi}{2}$ para el ángulo θ, y cero e infinito para ρ, cuando x e y varían desde 0 hasta infinito.

Tendremos, por tanto:

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(\rho^2 + a^2)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + a^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{-1}{\rho^2 + a^2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4a^2}$$

2.° *Calcular la integral doble:*

$$I = \iint \frac{ds}{OM^2}$$

extendida a la superficie limitada por la recta $x = R$ *y la mitad derecha del círculo* $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ (fig. 79).

— Expresemos todo en coordenadas polares.

La ecuación del círculo es $\rho = 2R \cos \theta$.

Tomemos una pequeña superficie ds comprendida entre dos radios vectores distantes $d\theta$, tendremos:

$$ds = \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Para un valor cualquiera de θ, el radio vector ρ varía desde

$$OP = \frac{R}{\cos \theta} \quad \text{hasta} \quad OB = 2R \cos \theta$$

Para calcular I, integremos θ, desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$ (en OA), y multipliquemos por dos:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{R}{\cos\theta}}^{R \cos \theta} d\theta \cdot \frac{\rho \, d\rho}{\rho^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{R}{\cos\theta}}^{2R \cos \theta} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\operatorname{Log} \rho\right]_{\frac{R}{\cos\theta}}^{2R \cos \theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Log} \frac{2R \cos \theta}{\frac{R}{\cos \theta}} \cdot d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Log} (2 \cos^2 \theta) \, d\theta.$$

— Integremos por partes, haciendo:

$$u = \operatorname{Log} (2 \cos^2 \theta) \quad \text{y} \quad dv = d\theta$$

de donde:

$$du = -2 \operatorname{tg} \theta \cdot d\theta \quad \text{y} \quad v = \theta,$$

lo cual nos da:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Log} (2 \cos^2 \theta) \, d\theta = 2\left[\theta \cdot \operatorname{Log} (2 \cos^2 \theta) + 2\int \theta \cdot \operatorname{tg} \theta \, d\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

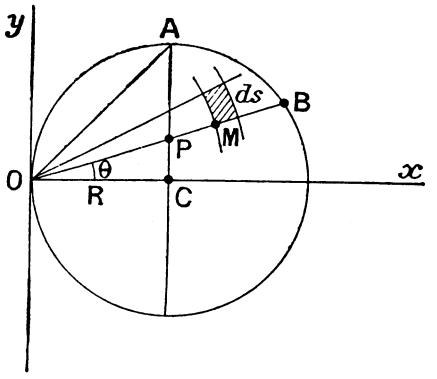

FIG. 79

El primer término del paréntesis cuadrado vale 0 para el límite inferior y 0 para el límite superior; y nos queda:

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot d\theta,$$

esta integral no puede calcularse por los métodos ordinarios. *Tomemos, por tanto, la fórmula de* SIMPSON, y dividamos el intervalo desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$ en $2n = 6$ partes iguales (por tanto, un intervalo vale $\frac{\pi}{24}$).

Hagamos $\theta \cdot \operatorname{tg}\theta = y$; tendremos:

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{\pi}{24}\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = 0{,}0172 \qquad y_5 = \frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 0{,}3023$$

$$y_3 = \frac{\pi}{12}\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 0{,}0702 \qquad y_6 = \frac{5\pi}{24}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24} = 0{,}5022$$

$$y_4 = \frac{\pi}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 0{,}1627 \qquad y_7 = \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854.$$

La fórmula de SIMPSON nos da:

$$I = 4\frac{\pi}{3 \cdot 24}[(y_1+y_7)+2(y_3+y_5)+4(y_2+y_4+y_6)]$$

$$= \frac{\pi}{18}[0{,}7854+2(0{,}0702+0{,}3023)+4(0{,}0172+0{,}1627+0{,}5022)] = 0{,}7433.$$

60. Cálculo de un volumen por cambio de variables. — En los cálculos anteriores de volúmenes se daba la ordenada y de un punto de la superficie $S = f(x, z)$ en coordenadas cartesianas.

Podemos también expresar y en función de dos variables: un radio vector ρ y un ángulo θ (fig. 80), es decir en coordenadas polares.

Razonemos del mismo modo y cortemos el volumen V mediante una sección que deje constante una de las coordenadas polares, por ejemplo, ρ; es decir, que cortamos el volumen mediante un cilindro de eje vertical Oy, y cuya intersección con el volumen V, viene determinada por dos generatrices del cilindro.

Para calcular la superficie de esta sección cilíndrica, la supondremos desarrollada en un plano, o sea:

$$S = \int y \cdot \rho \, d\theta = \rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} y \, d\theta$$

y como $\rho = f(\theta)$, el resultado de esta integral dependerá tan sólo de ρ, y será de la forma $\rho \cdot \varphi(\rho)$, de donde:

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} S \, d\rho,$$

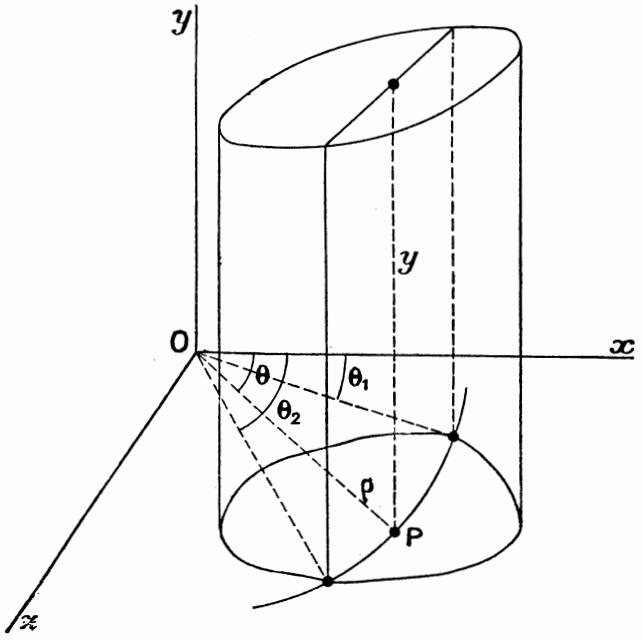

FIG. 80

y podremos esquematizar el mecanismo del cálculo del modo siguiente:

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \, d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} y \, d\theta$$

o también:

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2} y \, d\theta} \, \rho \, d\rho,$$

efectuándose las integrales de izquierda a derecha.

Esta regla está relacionada con la regla anterior. En efecto, debemos calcular $\Sigma y \, dS$ (fig. 81), lo cual nos daría en coordenadas polares (fig. 82) $\Sigma \rho \, d\theta \cdot d\rho$ y el volumen será el límite de la suma $\Sigma y \cdot \rho \, d\theta \cdot d\rho$, es decir:

$$V = \iint y \, \rho \, d\theta \cdot d\rho.$$

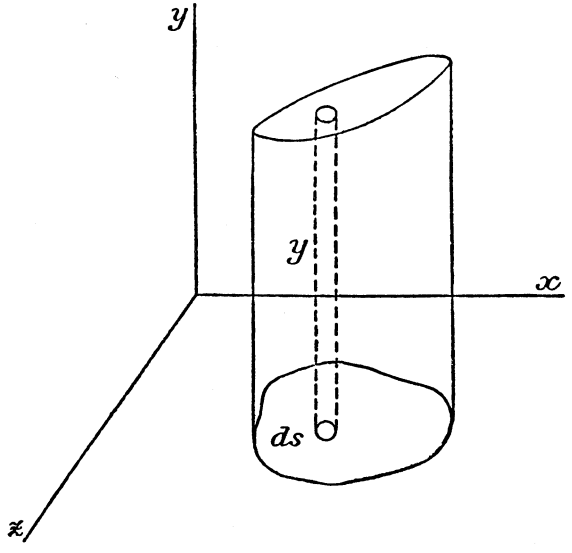

FIG. 81

En resumen, el cálculo de V se reduce a integrar respecto a θ, suponiendo primero constante ρ, después se multiplica por $d\rho$ y se integra respecto a ρ, y la regla de cálculo se confunde entonces con la anterior:

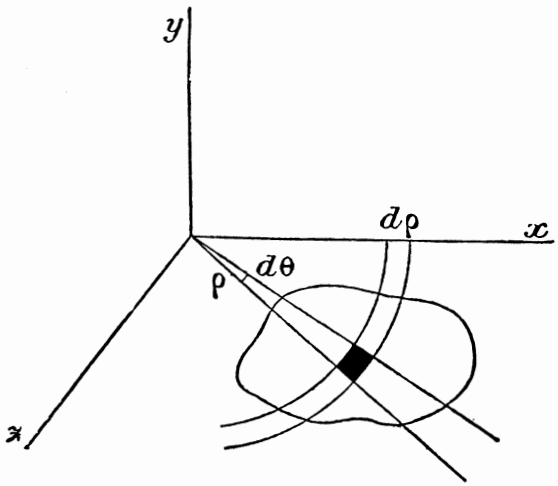

FIG. 82

Regla. — *Dejando una coordenada constante, se integra respecto a la otra coordenada; después se integra respecto a la primera coordenada.*

Podemos finalmente señalar que, en coordenadas polares, tenemos:

$$dS = dx \cdot dy = \rho \, d\theta \cdot d\rho.$$

Ejemplos.

1.° Tomemos el ejemplo 5 del principio de este capítulo. *Calcular el volumen limitado en su base por una semicircunferencia de radio igual a* 1, *y cuya altura está limitada en cada punto por la superficie:*

$$y = x^2 z.$$

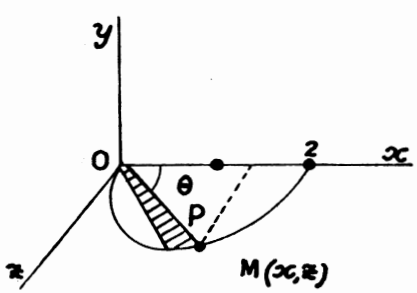

FIG. 83

— Hemos visto que el volumen era:

$$V = \iint x^2 z \, dx \, dz.$$

La figura 83 muestra cómo transformar a coordenadas polares: Tenemos, por ejemplo, para un punto M cualquiera de la circunferencia de la base, las dos abscisas:

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{y} \quad z = \rho \operatorname{sen} \theta$$

y

$$dx \, dz = \rho \, d\rho \, d\theta.$$

donde θ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, mientras que ρ varía desde 0 hasta $2\cos\theta$, en el punto M.

Tendremos:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho \operatorname{sen}\theta \cdot \rho\, d\theta\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^4\, d\rho.$$

Calculemos primero la integral derecha:

$$\int_0^{2\cos\theta} \rho^4\, d\rho = \frac{1}{5}\left[\rho^5\right]_0^{2\cos\theta} = \frac{32}{5}\cos^5\theta.$$

de donde:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta \cdot \frac{32}{5}\cos^5\theta$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{32}{5}\left[\frac{\cos^8\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Este resultado es idéntico al que se había encontrado directamente.

2.° *Volumen de una esfera* (fig. 84). Se demuestra en Geometría Analítica, que la ecuación de la esfera cuyo centro está en O es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

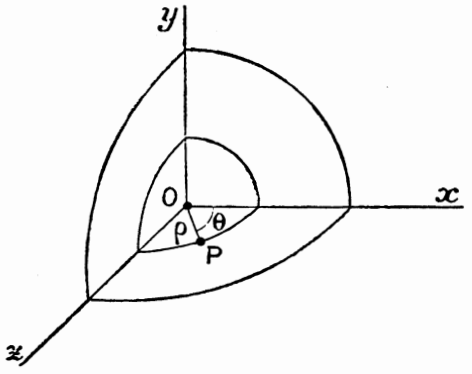

FIG. 84

— El volumen será:

$$V = \iint y\,dx\,dz = \iint \sqrt{R^2 - (x^2 + z^2)}\,dx\,dz.$$

En coordenadas polares tendremos, para la mitad de la esfera:

$$V = \iint \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho\,d\rho\,d\theta,$$

donde θ varía desde 0 hasta 2π.

Calculemos primeramente:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho\,d\theta,$$

después:

$$V = \int_{\rho=0}^{\rho=R} \left[\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\,d\theta\right] d\rho$$

$$= \pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot 2\rho\,d\rho = \left[-\frac{2\pi}{3}(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

el volumen total de la esfera será el doble de este valor:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3.° *Sea una esfera de centro* O *y radio* R, *limitada por los tres planos* Ox, Oy, Oz. *Consideremos el cilindro de revolución cuya base es un semicírculo* OA *de radio* $\frac{R}{2}$. *Calcular el volumen común a la esfera y al cilindro* (fig. 85).

— Tenemos:

$$V = \iint_{OMA} y\,dx\,dz.$$

La ecuación de la esfera, de centro O, es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

de donde:

$$V = \iint \sqrt{R^2 - (x^2 + z^2)}\,dx\,dz.$$

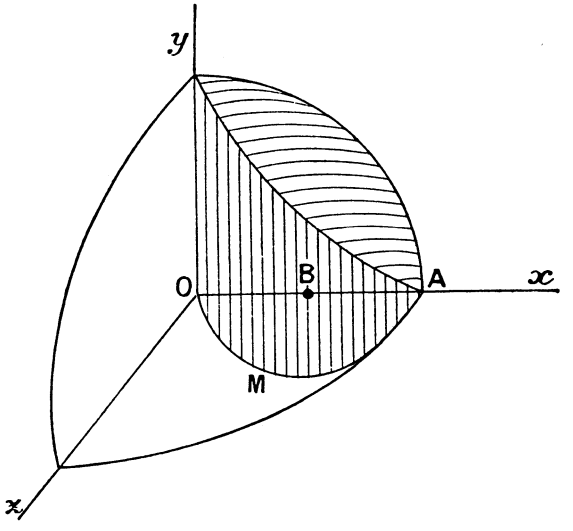

FIG. 85

Cambiemos las variables y calculemos V, teniendo en cuenta que $\rho^2 = x^2 + z^2$:

$$V = \iint y\rho \, d\rho \, d\theta = \iint \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[-\frac{1}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R \cos \theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{1}{3} (R^3 - R^3 \operatorname{sen}^3 \theta) \right] = \frac{1}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right),$$

que es el volumen buscado.

Calculemos ahora la diferencia entre el volumen de la porción de esfera considerada, es decir $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$ y el volumen calculado:

$$\frac{1}{6} \pi R^3 - \left(\frac{\pi R^3}{6} - \frac{2R^3}{9} \right) = \frac{2}{9} R^3$$

resultado curioso, ya que no depende de π.

3.° *Calcular:*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

— Llamemos I a esta integral. La curva:

$$y = e^{-x^2}$$

es una curva con forma de campana (curva de GAUSS), ver curva C en la figura 86. La integral es la superficie comprendida entre la curva y el eje de las x. Vamos a calcularla y luego multiplicaremos por 2 el resultado para tener la superficie total desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Es evidente que esta integral es igual a:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-z^2}\,dz.$$

Calculemos I^2:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-z^2}\,dz.$$

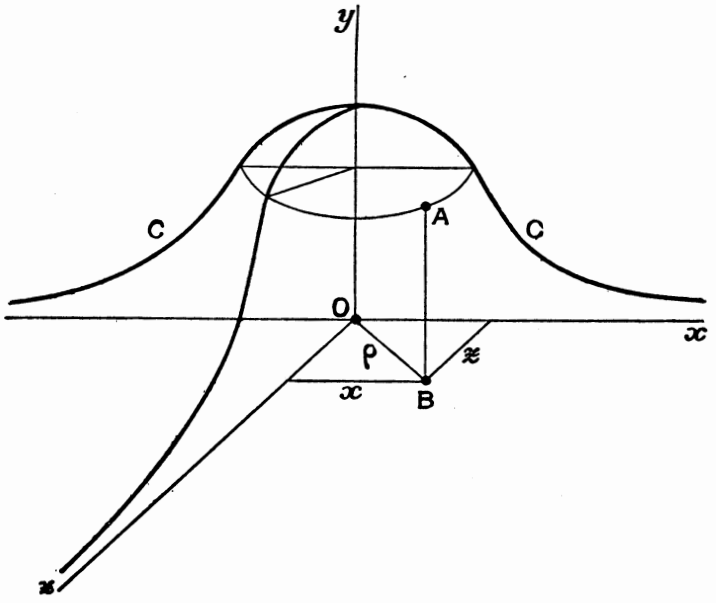

FIG. 86

Pero, de acuerdo con las reglas que hemos dado para las integrales dobles, podemos escribir esta expresión:

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+z^2)}\, dx\, dz.$$

Esta integral doble puede considerarse como la cuarta parte del volumen total de un sólido de revolución alrededor de Oy, cuyo meridiano es:

$$y = e^{-x^2},$$

y cuya altura $y = AB$, respecto al plano xOz, es:

$$y = e^{-(x^2+z^2)} = e^{-\rho^2},$$

siendo $dx\, dz$ el elemento de superficie del plano xOz, para una cierta forma de descomposición. La integral va desde 0 hasta infinito, para x y para z, con lo que nos da el volumen del sólido correspondiente a un cuadrante.

Se puede calcular este volumen de otro modo. Cortemos el volumen total en coronas que tengan O como centro, y comprendidas entre los círculos de radios ρ y $\rho + d\rho$; la superficie de esta corona es $2\pi\rho\, d\rho$.

Tendremos, por tanto:

$$4I^2 = \int_0^\infty 2\pi\rho e^{-\rho^2}\, d\rho = -\pi \left[e^{-\rho^2}\right]_0^\infty = \pi$$

de donde:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La integral total, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, será el doble y tendremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

61. Aplicación de las integrales dobles al cálculo de los centros de gravedad. — Ya vimos en el Tomo III (*Cálculo integral*) las fórmulas que permiten encontrar, mediante integrales simples, la posición del centro de gravedad de una superficie. Los centros de gravedad se pueden calcular también mediante integrales dobles.

— Consideremos, en el plano xOy de la figura 87, una superficie S de ecuación conocida, y sea P un punto cualquiera de esta superficie, de coordenadas x e y. Demos a x y a y incrementos *infinitamente pequeños* Δx y Δy, con lo que determinamos un pequeño rectángulo de superficie:

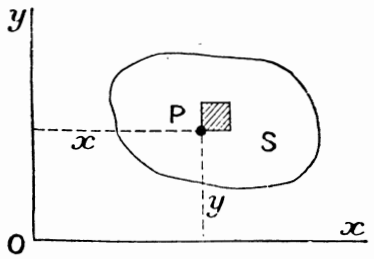

FIG. 87

$$\Delta S = \Delta y \cdot \Delta x.$$

El momento de esta superficie, respecto al eje Ox es $y \cdot \Delta x \, \Delta y$, y respecto al eje Oy vale $x \cdot \Delta x \, \Delta y$.

— Apliquemos el teorema de los momentos (sustituyendo superficies por masas) y escribiendo que el momento de la resultante es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes. Si llamamos X e Y a las coordenadas del centro de gravedad G de la superficie S, tendremos, cuando Δx y Δy tienden hacia cero:

$$Y \cdot S = \Sigma (y \cdot \Delta x \, \Delta y),$$

y como hay dos variables, podemos escribir en el límite:

$$Y \cdot S = \iint y \, dx \, dy$$

de donde:

$$\boxed{Y = \frac{\iint y \, dx \, dy}{\int y \, dx}}$$

Del mismo modo, encontraríamos:

$$\boxed{X = \frac{\iint x \, dx \, dy}{\int y \, dx}}$$

En estas fórmulas, x e y son las coordenadas de un punto cualquiera interior a la superficie y no las de un punto de la curva $y = f(x)$.

Naturalmente, si la curva tiene un eje de simetría, por ejemplo, el eje Oy, el centro de gravedad G estará sobre este eje de simetría, por tanto X es nulo. Basta elegir convenientemente la ecuación de la curva.

Primer ejemplo. — *Encontrar el centro de gravedad de la superficie de la parábola*

$$y^2 = 4x$$

hasta $x = h$ (fig. 88).

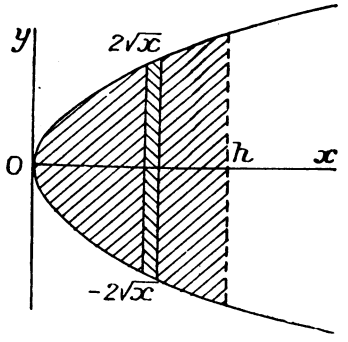

FIG. 88

— En este caso, Y = 0; calculemos X. El numerador de X es:

$$N = \int_0^h \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x\,dx\,dy.$$

la integral derecha (siendo x constante) da:

$$\int_{-2\sqrt{x}}^{+2\sqrt{x}} dy = 4\sqrt{x}$$

de donde:

$$N = \int_0^h 4x\sqrt{x}\,dx = \frac{4\cdot 2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^h = \frac{8}{5}h^{\frac{5}{2}}$$

Calculemos ahora el denominador de X, es decir la superficie S de la curva:

$$S = \int_0^h \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx\,dy = \int_0^h dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy$$
$$= \int_0^h dx\left[y\right]_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} = \int_0^h 4\sqrt{x}\,dx$$
$$= 4\cdot\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^h = \frac{8}{3}h^{\frac{3}{2}}.$$

Tendremos, finalmente:

$$X = \frac{\frac{8}{5}h^{\frac{5}{2}}}{\frac{8}{3}h^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}h.$$

Segundo ejemplo. — *Encontrar el centro de gravedad de un semielipsoide de revolución* (fig. 89).

— El centro de gravedad estará, evidentemente, en el eje. Llamemos Y a la ordenada de dicho centro. Tomemos una rebanada de anchura dy y radio x: su volumen es $\pi x^2\,dy$ y su momento respecto al plano xOz vale: $\pi x^2\,y\,dy$.

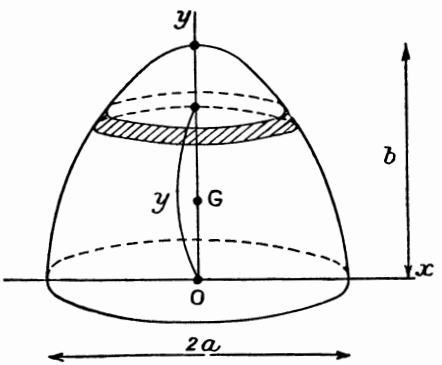

FIG. 89

El volumen del elipsoide será:

$$V = \int_0^b \pi x^2\,dy$$

y el teorema de los momentos nos da:

Momento de la resultante = Σ de los momentos de las componentes, o sea:

$$Y \cdot V = \int_0^b \pi x^2\,y\,dy.$$

Pero, tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de donde:

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Tendremos, por tanto:

$$Y = \frac{\int_0^b \pi a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) y\, dy}{a^2 \int_0^b \pi \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy}$$

integrales fáciles de calcular. Finalmente se encuentra:

$$Y = \frac{3}{8} b$$

62. Caso en que la curva viene dada en coordenadas polares. — Consideremos en la figura 90 un punto P, tal que:

$$\rho = f(\theta)$$

Si ρ varía en $d\rho$ y θ en $d\theta$, se obtiene una pequeña superficie, cuya parte principal es:

$$dS = \rho\, d\rho\, d\theta$$

donde:

$x = \rho \cdot \cos\theta$ y $y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$.

Los momentos de dS son:

Respecto al eje y: $\rho \cos\theta \cdot \rho\, d\rho \cdot d\theta$

Respecto al eje x: $\rho \operatorname{sen}\theta \cdot \rho\, d\rho \cdot d\theta$,

por otra parte, la superficie total es:

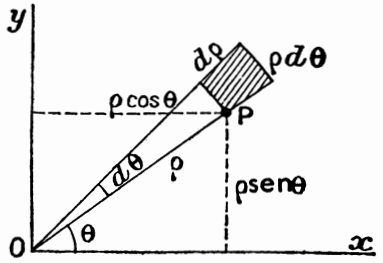

FIG. 90

$$S = \iint \rho\, d\rho\, d\theta.$$

Las coordenadas del centro de gravedad serán:

$$X = \frac{\iint \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta}{\iint \rho\, d\rho\, d\theta}$$

y

$$Y = \frac{\iint \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta}{\iint \rho\, d\rho\, d\theta}$$

Ejemplo. — Calcular la posición del centro de gravedad de la cardioide:

$$\rho = R(1 + \cos\theta)$$

donde θ varía desde 0 hasta 2π, y ρ desde $2R$ hasta 0.

Se encuentra fácilmente:

$$X = \frac{5}{6} R,$$

siendo:

$$Y = 0.$$

63. Aplicación de las integrales dobles al cálculo de los momentos de inercia de superficies. — En el capítulo I hemos estudiado el cálculo de los momentos de inercia por medio de integrales simples. Se pueden también calcular por medio de integrales dobles.

— Consideremos en la figura 87 una superficie S, y en su interior un punto P cualquiera de coordenadas x e y. Sean $x + \Delta x$ e $y + \Delta y$, con lo cual determinamos un rectángulo *infinitamente pequeño*, cuya superficie es:

$$\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$$

Por definición, su momento de inercia es:

Respecto al eje Oy: $x^2 \cdot \Delta x \, \Delta y$

Respecto al eje Ox: $y^2 \cdot \Delta x \, \Delta y$

Basta sumar estos momentos y pasar al límite (cuando Δx y Δy tienden hacia cero):

$$M_{oy} = \text{límite} \sum x^2 \Delta x \, \Delta y = \int\int x^2 \, dx \, dy,$$

$$M_{ox} = \text{límite} \sum y^2 \Delta x \, \Delta y = \int\int y^2 \, dx \, dy.$$

De un modo general, si r es la distancia de un punto cualquiera (del interior de la superficie considerada) a un eje cualquiera, el momento de inercia total respecto a este eje será:

$$\boxed{I = \int\int r^2 \cdot dS}$$

Ejemplos:

1.° *Calcular el momento de inercia, respecto al eje Oy, de la superficie interior a la parábola, cuya ecuación es* $y^2 = 4x$ *y limitada por la recta* $x = h$ (fig. 91).

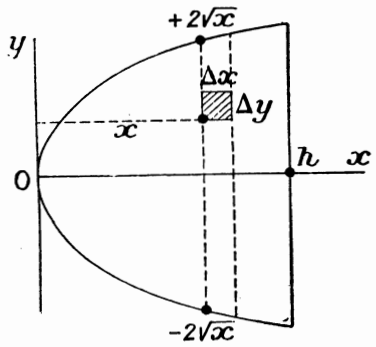

FIG. 91

— Tenemos:

$$I = \iint x^2\, dx\, dy.$$

Pero, según la figura, en la integral derecha en y, vemos que y varía desde $-2\sqrt{x}$ hasta $+2\sqrt{x}$, mientras que en la integral de izquierda en x, x varía desde 0 hasta h:

$$I = \int_0^h \int_{-2\sqrt{x}}^{+2\sqrt{x}} x^2\, dx\, dy = \int_0^h \boxed{\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy}\, x^2\, dx$$

$$= \int_0^h 4\sqrt{x} \cdot x^2\, dx = \int_0^h 4x^{\frac{5}{2}}\, dx$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{7}\left[x^{\frac{7}{2}}\right]_0^h = \frac{8}{7}h^{\frac{7}{2}}$$

2.° *Encontrar el momento de inercia respecto al eje Oy, de la superficie de la elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se encuentra fácilmente:

$$I_y = \pi \frac{a^3 b}{4}.$$

3.° *Encontrar el momento de inercia, respecto al eje de las x, de la curva:*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

que es una astroide.

Se encuentra fácilmente:

$$I_x = \frac{21\pi a^4}{512}.$$

64. Caso en que la curva viene dada en coordenadas polares. — De un modo análogo al que hemos empleado en los centros de gravedad, tendríamos:

$$dS = \rho\, d\rho\, d\theta$$

donde: $x^2 + y^2 = \rho^2$

ya que: $x = \rho \cos\theta$ y $y = \rho \operatorname{sen}\theta$.

El momento de inercia polar, es decir respecto al polo O será:

$$I_0 = \iint \rho^3\, d\rho\, d\theta.$$

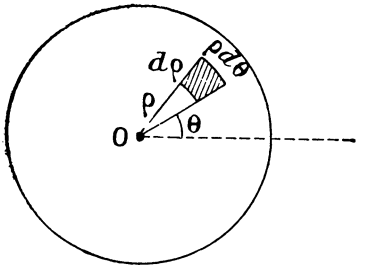

FIG. 92

Ejemplo: Momento de inercia polar de un círculo (fig. 92).

— Consideremos la pequeña superficie rayada en la figura. Su superficie vale:

$$dS = \rho\, d\rho\, d\theta$$

y su momento de inercia respecto al punto O es:

$$dI_0 = dS \cdot \rho^2 = \rho^3\, d\rho\, d\theta,$$

de donde:

$$I_0 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3\, d\rho\, d\theta = \int_0^R \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^R 2\pi\rho^3\, d\rho = \frac{\pi R^4}{2}$$

y como $S = \pi R^2$:

$$I_0 = S \cdot \frac{R^2}{2} = S\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

todo ocurre como si la superficie S estuviera concentrada en un punto a distancia $\frac{R}{\sqrt{2}}$, este valor se llama *radio de giro.*

Para una corona de radios R_1 y R_2 integraríamos ρ desde R_1 hasta R_2.

Para masas pesantes, se sustituye la superficie S por la masa del cuerpo.

Observación. — Se puede encontrar fácilmente un teorema fundamental que hemos demostrado anteriormente y que facilita mucho los cálculos. Este teorema permite pasar del momento de inercia polar respecto a un polo O, a los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares entre sí que pasan por el polo O.

Tenemos, en efecto:

$$I_0 = \int\int \rho^2 \cdot dS = \int\int (x^2 + y^2)\, dS = \int\int x^2\, dS + \int\int y^2\, dS = I_y + I_x.$$

El momento de inercia polar es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares que pasan por el polo. En el Tomo IV damos aplicaciones de este teorema y no las repetiremos aquí.

65. Otros ejemplos.

A título de ejercicio de integrales dobles, damos los ejemplos siguientes e invitamos al lector a hacer los cálculos.

1.° *Momento de inercia polar de la curva:*

$$\rho = 2R \cos \theta,$$

es la ecuación de una circunferencia respecto a un punto P situado en ella (fig. 93).

Si sumamos todos los elementos del sector PM, los límites de ρ son 0 y $2R \cos \theta$, y al sumar todos estos sectores, θ varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $+\frac{\pi}{2}$.

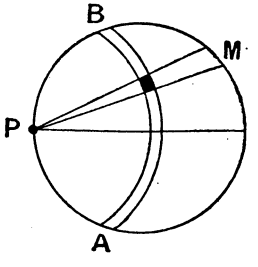

FIG. 93

Tendremos, según la fórmula anterior:

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R \cos \theta} \rho^3\, d\theta\, d\rho = \frac{3\pi R^4}{2}.$$

Se puede efectuar de otro modo, como hemos explicado más arriba, e invitamos al lector a hacerlo; es un excelente ejercicio. Si sumamos todos los elementos contenidos en la banda AB, en la cual ρ es constante y θ varía desde:

$$\theta_1 = -\arccos \frac{\rho}{2R} \quad \text{hasta} \quad \theta_2 = \arccos \frac{\rho}{2R},$$

y si hacemos variar después ρ desde 0 hasta 2R, tendremos:

$$I_0 = \int_0^{2R} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \rho^3\, d\rho\, d\theta = \frac{3\pi R^4}{2}.$$

2.° *Calcular el momento de inercia polar de la curva:*

$$\rho^2 = R^2 \operatorname{sen} \theta$$

respecto al polo O.

— La curva $\rho = f(\theta)$ aparece en la figura 94. Como la curva es simétrica, integraremos desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ y multiplicaremos por 4.

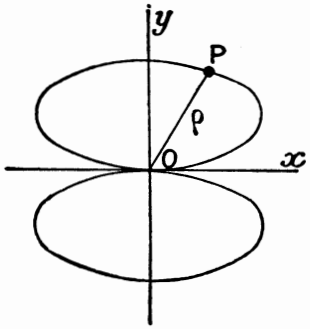

FIG. 94

Tenemos:

$$I_0 = 4 \iint \rho^2 \, dS$$

donde:

$$dS = \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Para obtener los límites, dejemos θ constante y hagamos variar ρ: los límites de ρ sobre el radio vector OP son:

$$\rho = 0 \quad \text{y} \quad \rho = R\sqrt{\operatorname{sen} \theta}.$$

Después haremos variar θ desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

Tendremos, por tanto:

$$I_0 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} \rho^3 \, d\theta \, d\rho.$$

Calculemos primero la integral respecto a ρ:

$$\int_0^{R\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} \rho^3 \, d\rho = \frac{1}{4}\left[\rho^4\right]_0^{R\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{1}{4} R^4 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

de donde:

$$I_0 = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{4} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta = R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{R^4}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi R^4}{4}$$

3.° *Momento de inercia polar de la cardioide:*

$$\rho = R\,(1 + \cos \theta).$$

Encontramos:

$$I_0 = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\rho} \rho^3\, d\theta\, d\rho = \frac{35\pi R^4}{16}.$$

4.° *Momento de inercia polar de la curva:*

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

donde θ varía desde $-\frac{\pi}{4}$ hasta $+\frac{\pi}{4}$, y que representa una hélice de dos palas (curva llamada *lemniscata,* Ver Tomo VI).

Tenemos:

$$I_0 = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^3\, d\rho\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$= a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\, d\theta = a^4\left[2\theta + \operatorname{sen} 2\theta \cdot \cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^4}{8}.$$

5.° *Calcular el momento de inercia, respecto al eje polar, de la curva* $\rho = 1 + \cos\theta$.

— *Respecto al eje polar,* el momento de inercia de esta cardioide es:

$$I = \int ds\, y^2$$

siendo:

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta$$

y

$$ds = \rho\, d\rho\, d\theta.$$

Para un ángulo θ dado, ρ varía desde 0 hasta $1 + \cos\theta$. Hagamos variar θ desde 0 hasta π y multipliquemos por 2:

$$I = 2\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \rho\, d\theta\, d\rho$$

$$= 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho^3\, d\rho = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \frac{(1+\cos\theta)^4}{4} d\theta$$

pero:

$$(1 + \cos\theta)^4 = 1 + 4\cos\theta + 6\cos^2\theta + 4\cos^3\theta + \cos^4\theta$$

de donde:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta + 6\cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos^3\theta + \operatorname{sen}^2\theta \cos^4\theta)\, d\theta.$$

Calculémoslas separadamente:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2},$$

$$4\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \frac{4}{3}\left[\operatorname{sen}^3\theta\right]_0^{\pi} = 0,$$

$$6\int_0^{\pi} \cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\theta = \frac{6}{4}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 2\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{4},$$

$$4\int_0^{\pi} \cos^3\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\theta = 4\int_0^{\pi} (1 - \operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}^2\theta \cdot d(\operatorname{sen}\theta) = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos^4\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)\left(\frac{1 - \cos 4\theta}{8}\right) d\theta = \frac{\pi}{16}.$$

Tendremos:

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 + 3\frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{16}\right] = \frac{21\pi}{32}.$$

Si calculamos el momento de inercia respecto al eje Oy (es decir el eje que pasa por el polo O y perpendicular al eje polar Ox) tendríamos:

$$I_y = \int x^2\, ds = 2\int_0^{\pi} \cos^2\theta \cdot d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho^3\, d\rho,$$

un cálculo idéntico al anterior nos daría:

$$I_y = \frac{49\pi}{32}.$$

El centro de gravedad está en el eje Ox por razones de simetría, y se encuentra fácilmente que su abscisa X, contada a partir del polo O viene dada por la expresión (llamando S a la superficie de la semicardioide):

$$S \cdot X = 2\int_0^{\pi} \frac{2}{3}x \cdot ds = 2\int_0^{\pi} \frac{2}{3}\rho\cos\theta \cdot \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \rho^3 \cos\theta\, d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^3 \cdot \cos\theta\, d\theta = \frac{5\pi}{4},$$

siendo:

$$S = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta = \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Deducimos:

$$X = \frac{5\frac{\pi}{4}}{3\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{6}.$$

66. Teorema de Green. — Da una relación entre una integral curvilínea y una integral doble, y permite, en particular, encontrar la condición necesaria y suficiente para que una integral curvilínea dependa solamente de los extremos.

— Consideremos una integral doble extendida a un dominio en el que la función a integrar es la derivada parcial respecto a z, por ejemplo, de una función de dos variables x y z:

$$\iint \left[\frac{\partial M(x, z)}{\partial z}\right] dx\, dz.$$

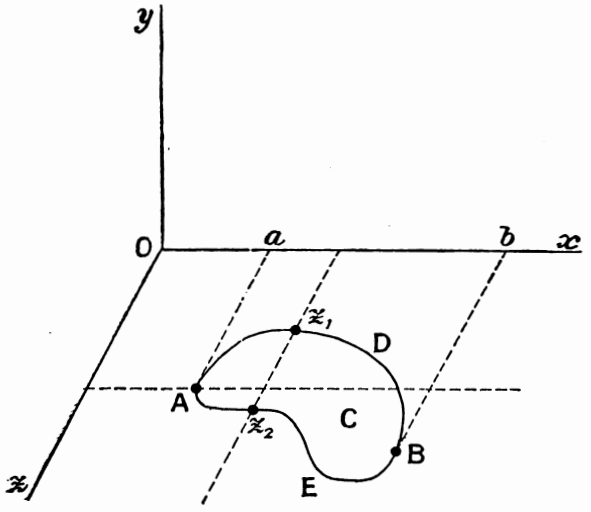

FIG. 95

Supongamos que en el plano xOz, el campo de las variaciones de x y de z sólo sea cortado en dos puntos por una paralela a los ejes de coordenadas (fig. 95). Para calcular la integral podemos integrar primero respecto a z, dejando x constante:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial M}{\partial z}\, dz = \Big[\ M\ \Big]_{z_1}^{z_2} = M\,(x_1 z_2) - M\,(x_1 z_1),$$

y después integrar respecto a x:

$$\int_a^b M(x_1 z_2)\, dx - \int_a^b M\,(x_1 z_1)\, dx$$

lo cual representa una integral curvilínea, que se escribirá:

$$\int_{ADB} M\,(x, z)\, dx + \int_{BEA} M\,(x, z)\, dx = \int_{ADBEA} M\, dx,$$

y girando en el sentido directo, a lo largo del contorno de la curva C, se obtiene:

$$\iint_C \frac{\partial M}{\partial z}\, dx\, dz = -\int_C M\, dx. \qquad (1)$$

Por un cálculo análogo, encontraríamos:

$$\iint_C \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dz = +\int_C N\, dz, \qquad (2)$$

y restando la fórmula (1) de la fórmula (2), se obtiene la fórmula de GREEN (llamada también fórmula de RIEMANN o de STOKES):

$$\boxed{\iint_C \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dx\, dz = \int_C M\, dx + N\, dz}$$

Con lo que obtenemos una relación entre una integral doble y una integral curvilínea, lo cual nos permite sustituir una por otra.

67. Aplicación. — Aunque en esta obra no podemos detenernos sobre esta cuestión, señalaremos, sin embargo, una aplicación inmediata.

— Sabemos que, para que una integral curvilínea dependa solamente de sus extremos, y no del camino recorrido, es necesario y suficiente que esta integral sea nula cuando el contorno C es cerrado.

De modo que, en lugar de preguntarnos cuáles son las condiciones para que, $\int M\,dx + N\,dz$ a lo largo de un arco cuyos extremos son conocidos, sólo dependa de estos extremos, podemos buscar cuáles son las condiciones para que la integral sea nula a lo largo de un contorno cerrado cualquiera, lo cual es idéntico, es decir, las condiciones para que:

$$\iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dx\,dz$$

sea nula en un dominio cualquiera.

Demostremos que para que una integral doble extendida a un dominio C *sea nula, es necesario que lo que se integra sea idénticamente nulo.*

Esta condición es suficiente. Demostremos que es necesaria. Si la función no es idénticamente nula, en un punto del dominio en el que varían z y x, tendrá un valor y un signo. Se puede entonces elegir una región suficientemente pequeña alrededor del punto (x, z) para que la función y conserve el mismo signo, pero entonces la integral doble no será nula, lo cual es contrario a la hipótesis, por tanto, en nuestro caso es necesario que:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0$$

o bien:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

encontrándose así la condición ya conocida, para que $M\,dx + N\,dz$ sea una diferencial exacta.

En todos estos razonamientos se ha supuesto, evidentemente, que la función cuya integral se calcula, es continua; y sabremos que lo es, cuando $\frac{\partial N}{\partial x}$ y $-\frac{\partial M}{\partial z}$ son continuas separadamente.

Ejemplo sobre la fórmula de GREEN. *Calcular la integral curvilínea* $\int (x^3\,dz - z^3\,dx)$ *tomada a lo largo de una circunferencia cuyo centro está en el origen y recorrida en el sentido directo. Transformar después esta integral curvilínea en integral doble y comparar los resultados.*

— Puesto que se trata de una circunferencia, expresemos mejor x y z en función de un parámetro, que será, evidentemente, el ángulo θ que forma uno de los radios con el eje de las x, lo cual nos da:

$$x = R\cos\theta \qquad z = R\operatorname{sen}\theta$$
$$dx = -R\operatorname{sen}\theta\, d\theta \qquad dz = R\cos\theta\, d\theta,$$

y en la que θ varía desde 0 hasta 2π. La integral se convierte en:

$$I = \int_0^{2\pi} R^4(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta)\, d\theta = R^4\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4\theta}{4}\right) d\theta = \frac{3}{2}\pi R^4$$

Transformemos ahora I en integral doble:

$$I = \int(-z^3\, dx + x^3\, dz) = \int(M\, dx + N\, dz).$$

La fórmula de GREEN da:

$$I = \iint\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dx\, dz$$

$$= \iint 3(x^2 + z^2)\, dx\, dz.$$

Transformemos en coordenadas polares, como hemos hecho en los ejemplos de integrales dobles, y tenemos:

$$\rho^2 = x^2 + z^2 \quad \text{y} \quad dx\, dz = \rho\, d\theta\, d\rho$$

de donde:

$$I = \iint 3\rho^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = 3\iint \rho^3\, d\rho\, d\theta$$

y en la que ρ varía desde 0 hasta R, y θ desde 0 hasta 2π.

Obtenemos:

$$I = 6\pi\int_0^R \rho^3\, d\rho = \frac{3}{2}\pi R^4$$

que es el mismo resultado que hemos encontrado anteriormente para la integral curvilínea.

Pero frecuentemente, uno de los procedimientos es más interesante que el otro.

II - NOCIONES SENCILLAS SOBRE LAS INTEGRALES TRIPLES

68. Definición. — Consideremos una función de tres variables independientes:

$$u = f(x, y, z)$$

por ejemplo, u sería la densidad δ, o la temperatura t, en cada punto de un cuerpo, que variará según las tres coordenadas x, y, z de dicho punto.

En la figura 96, consideremos un cierto volumen V en el espacio, limitado en el plano horizontal por la curva C y limitado en su parte

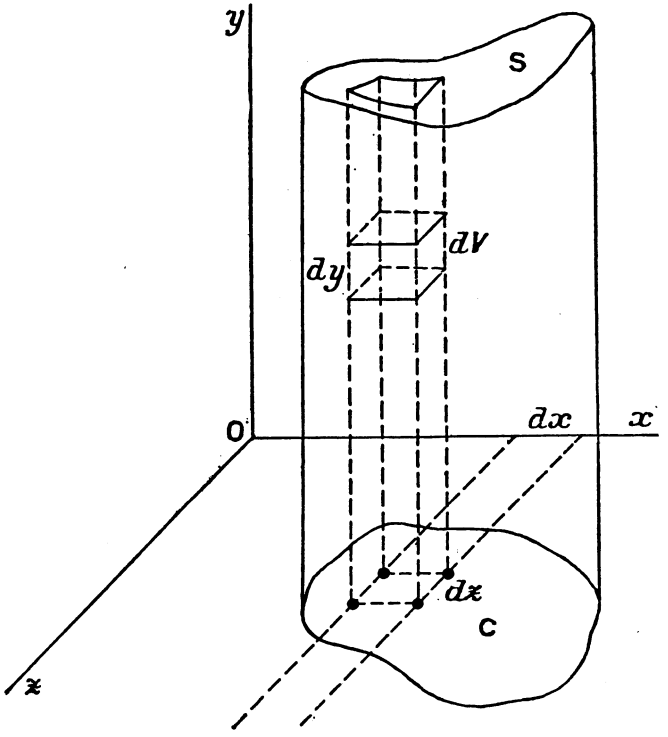

FIG. 96

superior por una cierta superficie S. La función u tiene un valor bien determinado en cada punto.

Dividamos este volumen V en pequeños paralelepípedos infinitamente pequeños, cortando este volumen por medio de planos paralelos a los tres planos de coordenadas, y distantes entre sí, dx, dz y dy respectivamente. Uno de los paralelepípedos tendrá un volumen:

$$dV = dx \cdot dz \cdot dy.$$

Multipliquemos esta expresión por u:

$$f(x, y, z) \cdot dx\, dy\, dz,$$

y hagamos la suma de todas estas expresiones extendidas a todo el volumen (si u fuera la densidad en cada punto obtendríamos el peso total de este volumen).

Llamaremos *«integral triple»* a la expresión:

$$\iiint f(x, y, z) \cdot dx\, dy\, dz$$

que se lee: *«integral triple de* $f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$*»*.

Es raro que se presente el caso en que haya que calcular una integral triple, pero este tipo de integrales aparece en Física Matemática, en Electricidad en la teoría del potencial, en la teoría de Elasticidad, etc., y representa *una notación de una operación que puede efectuarse*, es, por tanto, un símbolo. Su transformación en integral doble conduce a teoremas complicados que no podemos estudiar aquí.

Caso particular. — Si la función:

$$u = f(x, y, z) = 1,$$

la integral triple:

$$\iiint dx\, dy\, dz$$

representa *el volumen total.*

Podemos demostrar que, para calcularla, basta hacer tres integrales simples, que hay que entender del modo siguiente, de un modo análogo al que hemos visto para las integrales dobles:

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{x_2}^{x_1} dx \right] dy \right] dz.$$

El orden de las integrales puede invertirse.

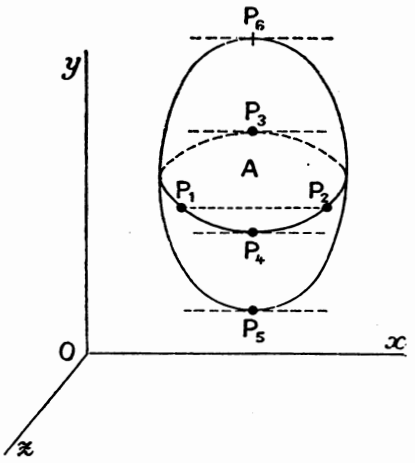

FIG. 97

Consideremos un cierto volumen V (fig. 97), cortémosle por un plano paralelo al plano xOz, lo cual nos da la superficie A, y por un punto P_1, tracemos la horizontal P_1P_2 paralela al mismo tiempo al plano vertical xOy, permaneciendo z e y constantes.

Llamemos x_1 a la abscisa del punto P_1 y x_2 a la abscisa del punto P_2, y calculemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z)\, dx = F$$

en la cual x_1 y x_2 dependen a la vez de y y de z.

Hagamos ahora variar z desde P_3 *hasta* P_4, que son los límites de z para la superficie A y llamando z_1 y z_2 a las ordenadas de los puntos P_3 y P_4, calculemos la integral:

$$\int_{z_1}^{z_2} F\, dz = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z)\, dx$$

que no contiene x y donde y es constante, z_1 y z_2 dependen de y.

Llamemos G al resultado de esta integral, y hagamos ahora variar y desde P_5 hasta P_6, que son los límites extremos de y. Siendo y_1 e y_2 las ordenadas de estos dos puntos extremos, ordenadas que son, además, constantes, calculemos:

$$\int_{y_1}^{y_2} G\, dy = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z)\, dx$$

que contendrá solamente z.

Podríamos invertir el orden de las operaciones.

Se ve así, que tendremos que efectuar sucesivamente tres integrales.

Pero en este «*Curso Elemental de Matemáticas Superiores*» no nos podemos detener en este punto, tan sólo hemos querido dar unas nociones sencillas sobre las integrales triples.

Hagamos ahora dos ejemplos, con objeto de mostrar el modo de calcular una integral triple.

69. Ejemplos.

1.° *Calcular:*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r^3 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr.$$

Efectuando la integral derecha $\int_0^a r^3\,dr$, nos queda:

$$I = \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{a^4}{4}\cdot\left(-\frac{\cos^2\varphi}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{a^4}{8}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi a^4}{4}$$

2.° *Calcular el volumen del elipsoide:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

— Calculemos la octava parte de este volumen, de acuerdo con la figura 98. Cortemos este volumen por dos planos paralelos distantes dx y paralelos al plano yOz, y consideremos en esta rebanada un pequeño prisma elemental, cuya base tiene como superficie $dx.dz$. La altura de este prisma viene dada por la ecuación del perfil de la curva:

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}} = y_1.$$

En este prisma, consideremos un pequeño paralelepípedo de altura dy, el volumen total será:

$$V = 8\int\int\int dx\,dz\,dy.$$

Busquemos los límites.

Para tener el volumen de la rebanada de anchura dx, hay que hacer variar z desde 0 hasta un valor z_1 que se obtiene tomando la ecuación (1) y haciendo en ella $y = 0$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

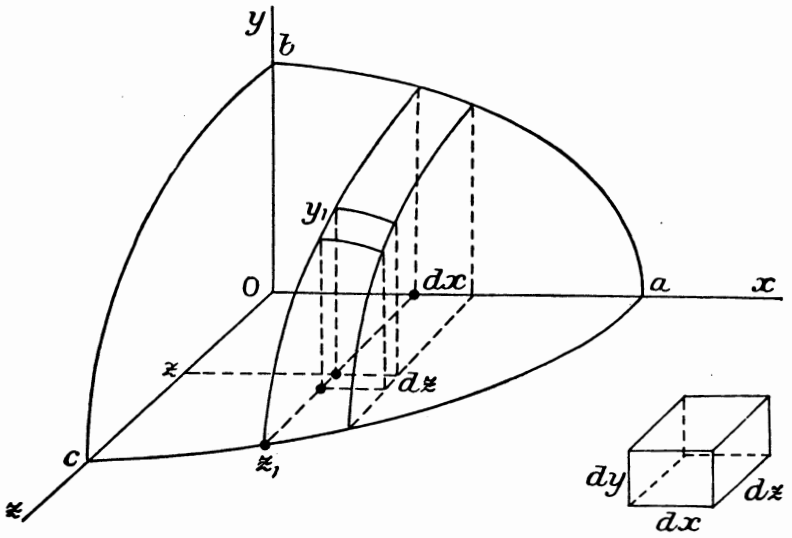

FIG. 98

de donde:

$$z_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

En cuanto a los límites de x, son 0 y a.

Tendremos por tanto:

$$V = 8\int_0^{\cdot}\int_0^{z_1}\int_0^{x_1} dx\,dz\,dy$$

$$= 8\int_0^{\cdot}\int_0^{x_1} y_1\,dx\,dz = 8\int_0^{a}\int_0^{z_1} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dz.$$

Hagamos: $1 - \frac{x^2}{a^2} = K^2$ y $\frac{z^2}{c^2} = u^2$ de donde $dz = c\,du$.

Para $z = 0$, $u = 0$ y para $z = c$, $u = 1$.

Calculemos ahora:

$$\int \sqrt{K^2 - u^2} \cdot c\, du.$$

Hagamos: $u = K \operatorname{sen} \varphi$,

para: $u = 0 \qquad \varphi = 0$

y para: $u = K \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$,

de donde: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{K^2 - K^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot c\, K \cos \varphi\, d\varphi = c\, K^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi\, d\varphi$

$$= cK^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = c\, K^2 \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= cK^2 \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi}{4} c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Tendremos, por tanto:

$$V = 8b \int_0^a \frac{\pi}{4} c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi\, bc \left[\int_0^a dx - \int_0^a \frac{x^2 dx}{a^2}\right]$$

$$= 2\pi\, bc \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{4}{3} \pi\, abc.$$

Si $a = b = c = R$, encontramos el volumen de la esfera $\frac{4}{3}\pi R^3$.

3.° *Calcular:*

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \theta \cdot d\rho\, d\theta\, d\varphi}{(\rho^2 + a^2)^2}$$

Se obtiene sucesivamente:

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\rho^2\, d\rho}{(\rho^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{-\rho}{\rho^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi^2}{8a}.$$

LISTA RECAPITULATIVA

DE LAS

FORMULAS DEL TOMO IV

Momentos de inercia

Energía cinética de un disco $W = \frac{1}{2}\omega^2 I$

donde:

$$I = \int dm\, r^2.$$

Momento de inercia de líneas respecto a un punto, o un eje, o un plano:

$$I = \int dl\, r^2.$$

Momento de inercia de superficies respecto a un punto, un eje, o un plano:

$$I = \int ds\, r^2.$$

Momento de inercia polar (respecto a un punto):

$$I_0 = I_x + I_y$$

donde I_x e I_y son los momentos de inercia respecto a dos ejes Ox y Oy rectangulares.

Momento de inercia respecto a un eje cualquiera:

$$I_X = I_G + MD^2$$

donde I_G es el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad, y paralelo al primer eje, y D la distancia entre los dos ejes.

— *Momentos de inercia diversos:*

De una semicircunferencia respecto a uno de sus diámetros: $I_x = \frac{\pi R^3}{2}$.

De una circunferencia respecto al centro: $I_0 = 2\pi R^3$.

De un volante de masa M, delgado, y en el que toda la masa está a la misma distancia del centro: $I_0 = MR^2$.

De una circunferencia respecto a un diámetro: $I_x = \pi R^3$.

De la superficie de un rectángulo respecto a su base: $I = \frac{bh^3}{3}$,

y respecto a un eje paralelo que pasa por G: $I_G = \frac{bh^3}{12}$.

De la superficie de un círculo respecto a su centro: $I_0 = \frac{\pi R^4}{2}$.

De la superficie de un triángulo respecto a su base: $I_x = \frac{bh^3}{12}$.

De un cilindro respecto a su eje: $I = \frac{MR^2}{2}$.

Desarrollos en serie de Fourier

En su forma más general la serie de *Fourier* se escribe:

$$y = A_0 + Y_1 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi_1) + Y_2 \operatorname{sen}(2\omega t - \varphi_2) + \ldots\ldots + Y_n \operatorname{sen}(n\omega t - \varphi_n),$$

o también:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= A_0 + A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen} 2x + A_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots\ldots + A_n \operatorname{sen} nx \\ &\quad + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \ldots\ldots + B_n \cos nx, \end{aligned}$$

siendo:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen} nx\, dx$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx\, dx.$$

— *Caso particular*. Si la variable es el tiempo t, tenemos, siendo $x = \omega t$:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^{T} f(t) \cdot \operatorname{sen} n\omega t\, dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^{T} f(t) \cdot \cos n\omega t\, dt$$

donde: $y = f(t)$ es la ecuación de la curva.

Si la curva es doblemente simétrica, respecto a $\frac{T}{2}$ y a $\frac{T}{4}$, y si sólo se conoce la ecuación de la curva durante un cuarto de período, tenemos:

$$A_n = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cdot \operatorname{sen} n\omega t \, dt$$

$$B_n = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt.$$

Curvas diversas.

Curva en diente de sierra rectangular (onda cuadrada):

$$i = 4\frac{I}{\pi}\left(\operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5\omega t + \ldots\right).$$

Curva en diente de sierra triangular:

$$i = \frac{8I}{\pi^2}\left(\operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5\omega t - \frac{1}{49}\operatorname{sen} 7\omega t + \ldots\right).$$

Corriente alterna rectificada en una alternancia:

$$i = I\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} \omega t - \frac{2}{3\pi}\cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi}\cos 4\omega t \ldots\right).$$

Corriente alterna rectificada en dos alternancias:

$$i = \frac{2I}{\pi}\left(1 - \frac{2}{1 \cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{2}{3 \cdot 5}\cos 4\omega t \ldots\right).$$

Cálculo aproximado de una integral

Si se descompone un intervalo ab en $2n$ intervalos, tenemos $2n + 1$ ordenadas; la superficie comprendida entre una curva y el eje de las x viene dada por la **fórmula de Simpson:**

$$S = \frac{h}{3}\left[y_1 + y_{2n+1} + 2(y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n})\right]$$

donde h es la anchura de un intervalo, $h = \frac{b-a}{2n}$.

— Si E es la suma de las dos ordenadas extremas,

I la suma de todas las ordenadas de índice impar (excepto las dos extremas),

P la suma de todas las ordenadas de índice par, tenemos:

$$S = \frac{b-a}{6n}[E + 2I + 4P].$$

Integrales curvilíneas

Una integral tomada a lo largo de una curva, desde P_0 a P_1, de la forma:

$$\int_{P_0}^{P_1} f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy$$

se llama *integral curvilínea.*

— Para que una integral de este tipo, sea independiente del camino recorrido, basta que la expresión:

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy$$

sea *una diferencial total exacta*, es decir, que se cumpla:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Diferenciación bajo el signo $\int$.

Tenemos:

$$\left[\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right]' = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$$

donde α es un parámetro.

Integración de las diferenciales totales:

Si la expresión $M\,dx + N\,dz$ es una diferencial total, se puede remontar a la función $f(x, z)$ integrando, y si se escribe:

$$\int M\, dx = F(x, z)$$

tenemos:

$$f(x, z) = F(x, z) + \int \left(N - \frac{\partial F}{\partial z}\right) dz + C.$$

Fórmula de Cauchy:

Tenemos:

$$f(x, z) = \int_{x_0}^{x} M(x, z)\, dx + \int_{z_0}^{z} N(x_0, z)\, dz$$

donde x_0 y z_0 son valores arbitrarios, es decir, constantes.

Integrales dobles

Si tenemos una función de dos variables independientes:

$$y = f(x, z)$$

la expresión:

$$\iint_C y\,dx\,dz \qquad \text{o bien} \qquad \iint_C f(x, z)\,dx\,dz$$

representa un volumen V limitado en el plano xOz por una curva C.

Prácticamente, *la fórmula del volumen* es:

$$V = \int_{z_1}^{z_2}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx\,dz = \boxed{\int_{z_1}^{z_2}\left[\int_{x_1}^{x_2} y\,dx\right]dz}$$

Superficie de una curva plana $y = f(x)$:

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} dx\,dy.$$

Caso de una curva en coordenadas polares $\rho = f(0)$.

Primera fórmula de la superficie:

$$S = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_a^c \rho\,d\theta\,d\rho = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_a^c \rho\,d\rho\right]d\theta.$$

Segunda fórmula de la superficie:

$$S = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_e^f \rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[\int_e^f d\theta\right]\rho\,d\rho.$$

Cálculo de un volumen por cambio de variables. — Si en lugar de tener $y = f(x, z)$, que determina una superficie S en el espacio, tuviéramos la ordenada y en función de un radio vector ρ y de un ángulo θ, en coordenadas polares, el volumen V sería:

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho\,d\rho\int_{\theta_1}^{\theta_2} y\,d\theta = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} y\,d\theta\right]\rho\,d\rho.$$

o bien:

$$V = \iint y\rho\,d\theta\,d\rho.$$

Cálculo de la posición del centro de gravedad G

La abscisa de G es:

$$X = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\int y\,dx},$$

la ordenada de G es:

$$Y = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\int y\,dx}$$

donde x e y son las coordenadas de un punto cualquiera *interior* a la superficie, y no son las de un punto de la curva $y = f(x)$.

Caso en el que la curva viene dada en coordenadas polares $\rho = f(\theta)$.

Tenemos:

$$X = \frac{\iint \rho^2 \cos\theta\,d\rho\,d\theta}{\iint \rho\,d\rho\,d\theta}$$

$$Y = \frac{\iint \rho^2 \operatorname{sen}\theta\,d\rho\,d\theta}{\iint \rho\,d\rho\,d\theta}.$$

Cálculo de un momento de inercia

En general, tenemos:

$$I = \iint r^2\,dS.$$

y respecto a un eje Ox o bien Oy tenemos:

$$I_x = \iint y^2\,dx\,dy \qquad \text{y} \qquad I_y = \iint x^2\,dx\,dy.$$

Caso en el que la curva viene dada en coordenadas polares:

$$I_0 = \iint \rho^3\,d\rho\,d\theta.$$

Teorema de Green (o de *Stokes*, o bien de *Riemann*):

$$\iint_C \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dx\, dz = \int_C M\, dx + N\, dz.$$

Integrales triples

La expresión $\iiint dx\, dy\, dz$ representa un volumen, y tenemos:

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \left| \int_{y_1}^{y_2} \left| \int_{x_1}^{x_2} dx \right| dy \right| dz.$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS A RESOLVER

CAPITULO I

Cálculo de momentos de inercia
(por integrales simples)

Calcular el momento de inercia, respecto al eje de las x, de la línea formada por:

1-1. Un arco de sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ (de 0 hasta π)

1-2. Un arco de curva $y = \operatorname{tg} x$ $\left(\text{desde } 0 \text{ hasta } \frac{\pi}{4}\right)$

1-3. La catenaria $y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (desde $-a$ hasta $+a$)

1-4. La parábola $y = -4x^2 + 1$ $\left(\text{desde } -\frac{1}{2} \text{ hasta } +\frac{1}{2}\right)$

1-5. La curva $y = 2e^{-x}$ (desde 0 hasta $+2$)

1-6. La curva $y = \frac{1}{x}$ (desde $+1$ hasta $+10$).

Calcular el momento de inercia, respecto al eje de las x, de la superficie comprendida entre las curvas siguientes y el eje de las x:

1-7. $y = \operatorname{sen} x$ (desde 0 hasta π)

1-8. $y = \operatorname{tg} x$ $\left(\text{desde } 0 \text{ hasta } \frac{\pi}{4}\right)$

1-9. $y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (desde $-a$ hasta $+a$)

1-10. $y = -4x^2 + 1$ $\left(\text{desde } -\frac{1}{2} \text{ hasta } +\frac{1}{2}\right)$

1-11. $y = 2e^{-x}$ (desde 0 hasta $+2$)

1-12. $y = \frac{1}{x^2}$ (desde $+1$ hasta $+\infty$).

1-13. Calcular el momento de inercia de la superficie de un triángulo equilátero respecto a un eje que pasa por uno de sus vértices, y paralelo al lado opuesto.

1-14. Calcular el momento de inercia de la superficie de un triángulo equilátero respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad y paralelo a uno de los lados.

1-15. Sea la parábola $y = x^2$, que al girar alrededor del eje Oy engendra un paraboloide. Calcular el momento de inercia respecto a su eje de revolución Oy.

Calcular el momento de inercia, respecto al eje Ox, después respecto al eje Oy *de las superficies* limitadas por las curvas:

1-16. $y^2 = 8x, \quad y = 2x$

1-17. $y^2 = x, \quad x + y = 2, \quad y = 0$

1-18. $y = 4 - x^2, \quad y = 0$

1-19. $y^2 = 2x^3, \quad y^2 = 8x$ (en el primer cuadrante)

1-20. $y^2 = x + 1, \quad x + y = 1$

1-21. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \frac{1}{2}$ (la superficie encima de $y = 1/2$, después la que está debajo).

Calcular el momento de inercia, respecto a su eje de revolución, *de los volúmenes siguientes:*

1-22. Una esfera.

1-23. Un toro de sección circular.

1-24. Un cono recto.

1-25. Un toro de sección cuadrada.

Calcular el momento de inercia de un tubo homogéneo, siendo R y r los radios y h la altura.

1-26. 1.º) Respecto al eje de revolución.

1-27. 2.º) Respecto a una generatriz del cilindro (hueco) de radio r.

1-28. 3.º) Respecto a una generatriz del cilindro de radio R.

Calcular el momento de inercia polar en los casos siguientes:

1-29. El círculo $\rho = \cos\theta$, para la parte situada en el primer cuadrante, exterior al círculo $\rho = \operatorname{sen}\theta$.

1-30. El círculo $\rho = \operatorname{sen}\theta$, para la parte exterior a la cardioide $\rho = 1 - \cos\theta$.

1-31. La superficie comprendida entre los dos círculos $\rho = 3 \operatorname{sen}\theta$ y $\rho = 2 \operatorname{sen}\theta$.

Nota. — Veremos más adelante, en los ejercicios con integrales dobles, otros cálculos de momentos de inercia *que se deberán hacer con las integrales dobles.*

CAPITULO II

Aplicaciones de las integrales a problemas

2-1. La velocidad de un móvil viene dada por:

$$v = \frac{dx}{dt} = 10t + v_0.$$

Calcular el espacio recorrido si $v = 14$ y $x = 60$ para $t = 1$ segundo.

2-2. Suponer que la resistencia del aire sobre un automóvil es proporcional a la velocidad v. Si llamamos F a la fuerza suministrada por el motor y m a la masa en movimiento, tenemos:

$$m\gamma = m\frac{dv}{dt} = F - Kv,$$

calcular la velocidad v, en función de t, sabiendo que $v = 0$ para $t = 0$.

2-3. Si en el problema anterior se suprime F y se supone que la velocidad queda reducida únicamente por la resistencia del aire, calcular la velocidad en función del tiempo, siendo v_0 la velocidad en el momento en que se suprime la fuerza F del motor.

2-4. La resistencia que el aire ofrece a un paracaídas es proporcional al cuadrado de velocidad. El paracaidista pesa 80 Kg, el paracaídas 10 Kg, y la superficie del paracaídas es 25 m^2. Calcular con qué velocidad llegará el paracaidista al suelo al saltar, sin velocidad inicial, desde una altura cualquiera.

2-5. Si la resistencia del aire es 100 N/m^2 cuando la velocidad vale 9 m/seg, ¿con qué velocidad llega el paracaidista al suelo, suponiendo que han pasado 3 segundos?

2-6. Un río tiene la forma de la curva $4y = x^3 - 4x^2 + 4x$, y una carretera que le corta en el origen de coordenadas se supone que es el eje de las x. ¿Cuál es el valor del terreno comprendido entre el río y la carretetera, a partir del punto en que la carretera corta al río y hasta el punto en que ésta corta de nuevo al río? El terreno cuesta 10.000 pesetas la hectárea.

2-7. La velocidad angular de un volante es $\frac{d\alpha}{dt} = Kt + \omega_0$. Si suponemos que $\omega_0 = 4\pi$ radianes por segundo, y que $K = \frac{\pi}{6}$ rad/sg, calcular el número de vueltas realizadas durante el segundo minuto.

2-8. El calor específico del hierro, por debajo de 200 °C, viene dado por:

$$c = 0{,}105 + 0{,}00014t$$

donde t es la temperatura en grados Celsius. Calcular la cantidad de calor Q necesaria para elevar 100 Kg de hierro desde 50 hasta 100 °C, sabiendo que $\frac{dQ}{dt} = mc$, donde m es la cantidad de hierro en kilogramos, y Q el número de kilocalorías.

2-9. Calcular el tiempo necesario para vaciar un depósito semiesférico de 1,20 m de radio, si el orificio practicado en el fondo tiene 2,5 cm de radio.

2-10. Un cuerpo caliente se enfría según la ley:

$$\frac{dT}{dt} = -aT(1 + bT^{1/4})$$

donde a y b son coeficientes que dependen de la naturaleza del cuerpo (y de su color), T es la temperatura en grados Celsius y t el tiempo en segundos. Calcular el tiempo necesario para que un cuerpo se enfríe desde una temperatura T_1 hasta una temperatura T_2. Calcular este tiempo si $T_1 = 16$ °C, $T_2 = 8$ °C, $a = 0{,}001$ y $b = 0{,}6$.

2-11. Un móvil parte del reposo y cae desde una distancia h al centro de la tierra. La fórmula que da su aceleración γ después de una altura de caída x es:

$$\gamma = \frac{gR^2}{(h - x)^2}$$

siendo g la aceleración de la gravedad y R el radio de la tierra. Calcular la velocidad del móvil después de haber caído una distancia x, suponiendo nula la velocidad inicial. ¿Con qué velocidad llegará a la superficie de la tierra, si parte del reposo a una distancia 2R?

2-12. Si la resistencia del aire sobre un móvil es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación del movimiento de un móvil de masa m es:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - K^2v^2$$

donde v es la velocidad en el tiempo t.

Calcular:

1.° La velocidad al cabo de un segundo.

2.° El tiempo necesario para que alcance una velocidad V, partiendo del reposo.

3.° ¿Cuál es la velocidad máxima que puede alcanzar el móvil, partiendo del reposo?

2-13. La compuerta de un dique vertical tiene 10 m de anchura y 4 m de altura. Calcular la presión total del agua sobre esta compuerta, cuando el nivel de agua está a 4 m por encima de la parte superior de la compuerta.

2-14. Si la compuerta del problema anterior es circular y mide 8 m de diámetro, calcular la presión total ejercida por el agua sobre la compuerta cuando el nivel del agua está a 2 metros por encima de la parte superior de la compuerta.

2-15. Calcular la presión total que se ejerce sobre una esfera de 1,80 m de diámetro, sumergida de modo que su centro esté a 3 metros por debajo del nivel del agua.

2-16. El viento sopla sobre una torre circular con una velocidad de v metros por segundo. Si se admite que el viento ejerce sobre una superficie S perpendicular a su dirección una fuerza:

$$F = Kv^2S$$

donde K es la densidad del aire, calcular la presión total que se ejerce sobre la torre cuya altura es H metros y el radio r metros. Si $v = 15$ Km/h, $2r = 20$ m, $H = 100$ m, $K = 0{,}8$, calcular la fuerza total F expresada en Newtons.

2-17. Calcular el trabajo total efectuado para vaciar el agua de un pozo cilíndrico de radio r y altura H. El pozo está lleno de agua. $H = 50$ m y $r = 1$ m.

2-18. Un gas perfecto se expande reversiblemente y a temperatura constante desde una presión de 10 barias hasta una presión de 1 baria. Su volumen inicial es 1 litro; calcular el trabajo producido por la expansión.

2-19. Un gas que obedece a la ley de Joule sigue, a la temperatura absoluta T_1, una fórmula de comprensibilidad:

$$p(v - a) = Km$$

donde m es la masa, a y K son constantes.
Comprimimos el gas adiabáticamente y de modo reversible, desde una presión p_1 hasta una presión p_2 diez veces mayor. El calor específico a presión constante C, puede considerarse constante. Calcular la temperatura absoluta T_2 al final de la compresión y demostrar que es independiente de m y de a.

$$T_1 = 273^\circ,\ K = 70\ SI,\ C = 0{,}24\ cal/g.\ deg.$$

2-20. Un hilo de acero elástico, de longitud l y de sección s está sujeto en una de sus extremidades. Se suspende de la otra extremidad un peso P; calcular la cantidad de calor que absorbe o desprende el hilo para mantener su temperatura constante. Coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 10^{-5}$.

$$l = 1\ m,\ masa = 10\ Kg,\quad t = 27\ ^\circ C,\quad g = 10\ m/seg^2.$$

2-21. Calcular el trabajo realizado para vaciar un depósito de revolución de eje vertical, conociendo la ecuación del perfil del depósito y retirando el agua por la parte superior.

Aplicación a un depósito semiesférico de 10 m de profundidad.

2-22. Un depósito cilíndrico y horizontal está semilleno de aceite, de densidad 900 Kg/m^3. El diámetro del tubo es 4 m. Calcular la presión que se ejerce sobre la pared vertical que tapa el tubo.

2-23. Un depósito cónico de 12 m de profundidad está lleno de un líquido, de densidad 1.300 Kg/m^3. La parte superior es un círculo de 8m de diámetro. Calcular el trabajo realizado para vaciarlo, retirando el agua por la parte superior.

2-24. Calcular la presión total que se ejerce sobre una esfera de 6 m de diámetro, sumergida en agua, estando su centro a 10 m por debajo de la superficie del agua.

2-25. Un embudo cónico está lleno de agua. Siendo H su altura, R el radio de la base, y s la sección del tubo de salida del embudo, calcular el tiempo t para que el embudo se vacíe.

2-26. Un gas perfecto se comprime adiabáticamente y de modo reversible desde un volumen v_0 hasta un volumen v_1 diez veces menor. Su temperatura inicial es 293° absolutos. Se suponen los calores específicos constantes y su razón es igual a γ. Calcular la temperatura al final de la compresión.

2-27. Un hilo horizontal de longitud l está suspendido de su punto medio por un conductor al que llega una corriente 2I. Las dos extremidades del conductor horizontal están conectadas a un recipiente de mercurio de forma circular. El conjunto puede girar alrededor del hilo vertical.

A una distancia h del punto medio del conductor horizontal, y sobre el eje, está colocado un polo magnético, cuya masa magnética es m.

Calcular el momento del par que actúa sobre el conductor horizontal y encontrar sobre cada semiconductor horizontal el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas electromagnéticas.

2-28. Tenemos un hilo vertical indefinido recorrido por una corriente I. En las proximidades de este hilo, y en un plano vertical, tenemos un rectángulo formado por un hilo conductor, siendo sus dos lados paralelos al hilo indefinido, y recorrido también por una corriente I. En el lado del rectángulo que está más cerca del hilo, la corriente es del mismo sentido que la corriente en el hilo indefinido. Calcular, por integración, la fuerza total que se ejerce sobre dicho rectángulo.

2-29. Igual problema cuando el rectángulo se sustituye por un círculo; el radio R del círculo es más pequeño que la distancia a del hilo al centro del círculo.

2-30. Se forma una espiral de N espiras con un hilo aislado de diámetro a recorrido por una corriente I, cuyo diámetro exterior es 2R. Calcular la intensidad B del campo magnético a la distancia x del eje de la espiral.

2-31. Calcular la inductancia mutua m entre una espira de radio R y un solenoide de longitud indefinida, cuya sección es S, dispuesto según el eje de este círculo, en su interior y con n_1 espiras por unidad de longitud. Supondremos que S es pequeña respecto a la superficie del círculo.

2-32. Calcular la inductancia mutua m entre un toro de sección circular bobinado regularmente y con N espiras, y un hilo rectilíneo indefinido, colocado según el eje del toro.

2-33. Entre dos puntos A y B tenemos un circuito que comprende en serie, una resistencia R y una capacidad C. Establecemos bruscamente entre A y B una diferencia de potencial continua U. Calcular la cantidad de calor desprendida en R durante la carga del condensador, siendo:

$$U = 500 \text{ V}, \qquad C = 10 \text{ microfaradios.}$$

2-34. Una fuerza electromotriz E, cuya resistencia interna es nula, está conectada a una resistencia R y cuya inductancia es L.

Calcular:

1.º La energía total suministrada por la fuente durante un tiempo t, desde el cierre del circuito.

2.º La cantidad de calor en calorías, desprendido durante dicho tiempo t.

2-35. Calcular la intensidad del campo magnético en el centro de un triángulo equilátero, en el centro de un cuadrado, de un hexágono, y de un polígono regular de n lados recorrido por una corriente I.

2-36. Tenemos un toroide, en el cual el radio del círculo descrito por el centro del círculo generador vale 50 cm. La sección del toroide es circular y su radio vale $r = 15$ cm. El toroide contiene 7.000 espiras recorridas por una corriente de 3 Amperios. Calcular el campo medio B en el interior del toroide:

a) Considerando que el radio del círculo generador es pequeño frente al radio de revolución R.

b) Teniendo en cuenta la variación del campo magnético en los diferentes puntos de una sección.

2-37. Un conductor rectilíneo de longitud l gira en un plano con un movimiento uniforme de velocidad angular ω, alrededor de su extremidad O. En el mismo plano tenemos un conductor rectilíneo indefinido recorrido por una corriente I y situado a la distancia r de O (siendo $r > l$). Calcular la fuerza electromotriz, en función del tiempo, inducida en el

conductor que gira, para $I = 100$ A, $l = 90$ cm, $r = 100$ cm, $N = 120$ vueltas por minuto. Calcular en voltios, el valor de esta fuerza electromotriz cuando el conductor l es perpendicular al conductor indefinido.

2-38. Un circuito eléctrico comprende una resistencia $R = 1\ \Omega$ en serie con una bobina de inducción $L = 0{,}5$ henrios, y un condensador $C = 1$ faradio y está recorrido por una corriente alterna $i = e^{-t} \operatorname{sen} t$. Calcular la cantidad de calor Q (en calorías) desprendida en el circuito al cabo de un tiempo indefinido.

2-39. Un circuito eléctrico en forma de cuadrado, cuyo lado es $a = 100$ cm, tiene una sola espira recorrida por una corriente $I = 100$ A. En su plano y a una distancia $l = 1$ metro de uno de sus lados está colocada una masa magnética $m = 10^{-5}$ unidades SI, equidistante de los dos extremos de cada lado. Calcular la fuerza que se ejerce sobre esta masa magnética.

2-40. En las proximidades de un hilo rectilíneo indefinido, recorrido por una corriente $I = 100$ A se coloca un triángulo equilátero cuyo lado es $a = 100$ cm, siendo uno de los lados paralelo al hilo y situado a una distancia $l = 1$ metro del hilo. Calcular, mediante la ley de Biot y Savart, el flujo total captado por el triángulo.

2-41. Una corriente eléctrica tiene un valor instantáneo dado por la fórmula $i = 10\ e^{-20t} \operatorname{sen} 100\ t$. Calcular la cantidad de calor desprendida durante un período en una resistencia $R = 5$ ohmios.

2-42. Igual problema para una corriente cuya ecuación es $i = 10\ e^{20t} \operatorname{sen} 100\ t$.

2-43. Suponiendo la tierra esférica y homogénea ($R = 6.400$ Km), calcular en julios la energía necesaria para levantar del suelo, siguiendo una vertical, una masa de 1 Kg desde las alturas siguientes: $z_1 = 6{,}4$ Km, $z_2 = 6.400$ Km, $z_3 = \infty$ (de modo que la masa escape a la atracción terrestre). Se podrá escribir $x = R + z$, siendo x la distancia al centro de la tierra. Se toma g a nivel del suelo: $g_0 = 10$ m/sg^2.

2-44. Un globo tiene un volumen $V = 2.000$ m^3 en el suelo; está lleno de hidrógeno puro, cuyo volumen es $V_0 = 1.500$ m^3. La densidad δ del hidrógeno respecto al aire es $\delta = 0{,}07$, siendo la masa de la envoltura y de la cesta $m = 1.000$ Kg; la densidad del aire en el suelo es $a_0 = 1{,}3$ Kg/m^3.

Calcular:

1.º Su fuerza ascensional en el suelo.

2.º La altitud z del techo alcanzado por el globo. Se da $\dfrac{C}{c} = \gamma = 1{,}4$, $g = 9{,}81$ m/sg^2, siendo la presión en el suelo de una atmósfera.

2-45. Tenemos dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, en serie con una resistencia R_3, y una bobina plana de resistencia despreciable, de radio R,

y con N espiras. El conjunto se conecta a una diferencia de potencial U.

1.º Calcular la intensidad I de la corriente en el circuito.

2.º Las tres resistencias están situadas en un recipiente cerrado, lleno de aire en condiciones normales, cuya capacidad calorífica es C. Admitiendo que los cambios de calor con el exterior sean A calorías por segundo y por grado de diferencia de temperatura, calcular la temperatura T del recipiente en función del tiempo t del paso de la corriente.

Aplicación: $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $U = 12$ V, $R = 25$ mm, $N = 1.000$, $C = 12$ cal/ºC, $A = 0{,}8$, $J = 4{,}2$ J/cal.

2-46. Junto a un hilo vertical indefinido, recorrido por una corriente $I = 50$ A, se sitúa un cuadro rectangular vertical con $N = 10$ espiras. Este cuadro tiene $b = 15$ cm de ancho, una altura $a = 20$ cm, y su lado vertical más cercano al hilo está a una distancia $c = 10$ cm de este último. Calcular el flujo total captado por todas las espiras del cuadro y deducir la inductancia mutua m, en henrios, del hilo y del cuadro.

2-47. Tenemos un hilo conductor vertical indefinido y, junto a este hilo, una bobina plana con N espiras, situada en un plano vertical, y de radio R. El centro O de esta bobina está a una distancia a del hilo vertical, siendo $a > R$.

1.º Calcular la inductancia mutua m en henrios, para:

$$R = 5 \text{ cm}, \quad a = 6 \text{ cm}, \quad N = 200.$$

2.º Calcular el valor de m cuando a es muy grande con relación al radio R, cuando:

$$R = 5 \text{ cm}, \quad a = 100 \text{ cm}, \quad N = 2.000.$$

2-48. El aplanamiento x de un resorte es proporcional a la carga aplicada F. Calcular la energía almacenada por el resorte para un aplanamiento x. Se recuerda que $dW = F\,dx$.

CAPITULO III

Series de Fourier

Desarrollar en serie de Fourier las curvas siguientes:

3-1. $y = e^x$ entre 0 y 2π.

3-2. Curva trapezoidal de la figura 54:

desde 0 hasta $\frac{T}{6}$ tenemos: $y = \frac{6Y}{T} \cdot t$

desde $\frac{T}{4}$ hasta $\frac{T}{6}$ tenemos:

$y = Y$

y será: $A_n = \frac{8}{T}\left[\frac{6Y}{T}\int_0^{\frac{T}{6}} t \cdot \operatorname{sen} n\omega t \cdot dt + Y\int_{\frac{T}{6}}^{\frac{T}{4}} \operatorname{sen} n\omega t \cdot dt\right]$

3-3. $y = x^2$ (desde $-\pi$ hasta $+\pi$).

CAPITULO IV

Integración gráfica de la Fórmula de Simpson

Calcular:

4-1. $\int_0^2 \sqrt{8 + x^3}\, dx$, con 3 ordenadas.

4-2. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$, con 4 ordenadas.

4-3. $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + x^2}\, dx$, con 4 ordenadas.

4-4. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$,

4-5. $\int_4^{10} \frac{1}{\log_{10} x}\, dx$, con 7 ordenadas.

4-6. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}\, dx$, con 5 ordenadas.

4-7. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot d\varphi$, con 7 ordenadas.

4-8. $\int_0^{\pi} x \cdot \log_{10} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$, con 8 ordenadas.

4-9. $\int_6^{10} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, con 8 ordenadas.

4-10. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

4-11. $\int_0^{\pi/4} \log \cos x\, dx$ (desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$ en 6 partes iguales).

4-12. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 x}}$.

4-13. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$, con 6 ordenadas.

4-14. $\displaystyle\int_0^{1} \operatorname{sen} e^x \cdot dx$, con 5 ordenadas.

4-15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$, con 3 ordenadas.

4-16. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{8 + x^3}$, con 5 ordenadas.

4-17. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cdot \log \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$, con 9 ordenadas.

4-18. $\displaystyle\int_6^{} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, con 9 ordenadas.

4-19. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$, con 11 ordenadas.

4-20. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, con 7 ordenadas.

4-21. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \cdot \operatorname{tg} x\, dx$, con 7 ordenadas.

CAPITULO V

Integración de las diferenciales totales

Integrales curvilíneas

Integrar:

5-1. $\dfrac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}(y\,dx - x\,dy)$.

5-2. $\left(a + \dfrac{1}{1+x^2}\right)dx + \left(b + \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)dy$.

5-3. $\dfrac{1}{(x-y)^2}(x^2\,dy - y^2\,dx)$.

5-4. $(a^3 y + x^4)\,dx - (b^4 - a^3 x)\,dy$.

5-5. $\left[1 - \dfrac{4y^2}{(x-y)^2}\right]dx - \left[1 - \dfrac{4x^2}{(x-y)^2}\right]dx$.

5-6. $(x^2 + 2xy - 1)\,dx + (x^2 + y^2 - 2)\,dy$.

5-7. $\dfrac{(3y-x)\,dx + (y-3x)\,dy}{(x+y)^3}$.

5-8. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$.

5-9. Demostrar que la expresión:

$$\left(x + z + \frac{1}{z} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(z + x + \frac{1}{x} - \frac{x}{z^2}\right)dz$$

es la diferencial total de una función y de dos variables x y z. Calcular y *integrando.*

5-10. La expresión $\dfrac{(x+2z)\,dx + z\,dz}{(x+z)^2}$

¿es diferencial total exacta de una función de dos variables x y z? En este caso, integrar para encontrar dicha función.

5-11. Calcular n para que la expresión siguiente sea la diferencial total de una función y de dos variables:

$$\frac{(x - z)\,dx + (x + z)\,dz}{(x^2 + z^2)^n},$$

una vez calculado n, integrar para encontrar y.

5-12. La expresión siguiente no es una diferencial total:

$$(x^2 z + z^2 + 2x z)\,dx + (x^2 + x)(x + 2z)\,dz.$$

Encontrar un factor m que sea función de x solamente, de modo que al multiplicar la expresión por m, tengamos una diferencial total. Integrar y calcular la función y.

5-13. Averiguar si la expresión siguiente es una diferencial total exacta:

$$\frac{2x(1 - e^z)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \frac{e^z}{1 + x^2}\,dz.$$

5-14. Suponiendo que x y z son las coordenadas de un punto del plano xOz, calcular:

$$\int \frac{2x(1 - e^z)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \frac{e^z\,dz}{1 + x^2}$$

a lo largo de un contorno que va desde el punto $x = 0$, $z = 0$, al punto $x = 2$, $z = 4$.

5-15. Integrar la diferencial total:

$$\frac{(1 - x^2)\,dz - (1 - z^2)\,dx}{(1 + xz)^2}.$$

Integrales curvilíneas

5-16. Calcular la integral curvilínea $\int (x\,dy - y\,dx)$, cuando el punto (x, y) describe una elipse. Deducir la superficie de la elipse.

5-17. Calcular $\int (y^2\,dx - x^2\,dy)$ entre los puntos A (0,1) y B (1,0):

1.° Sobre la recta AB

2.° Sobre el arco de círculo de centro en O y radio 1.

5-18. Calcular $\int y^2\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$ a lo largo de un cuarto de círculo de radio 1, centro O, en el ángulo xOy. Se hará:

$x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$, cuando θ varía de 0 a $\pi/2$.

5-19. Calcular la integral anterior a lo largo de la cuerda que une los extremos del cuadrante de círculo.

5-20. En el ángulo recto xOy se describe tomando O como centro y con radio unidad, un cuadrante de círculo AMB, limitado en A por Ox y en B por Oy. Después se trazan las tangentes al círculo en A y B, cortándose estas tangentes en C. Calcular la integral curvilínea:

$$I = \int y^2\,dx + \frac{dy}{2 - x^2}$$

a lo largo del arco de círculo AMB, después a lo largo del contorno ACB.

5-21. Calcular la integral curvilínea: $\int y^2\,dx + \dfrac{dy}{x^2 + 3}$

a) A lo largo del cuadrante de circunferencia AMB con centro en O y radio unidad, limitado por los dos ejes.

b) A lo largo de la cuerda AB.

5-22. Calcular la integral curvilínea $\int \dfrac{y\,dx}{x^2 + y^2}$ a lo largo de la parábola $y^2 = 2x + 1$, recorrida enteramente en el sentido decreciente de las y.

CAPITULO VI

Integrales múltiples

1.º Integrales dobles

Calcular:

6-1. $\int_0^1 \int_0^2 x^2\,dx\,dy.$

6-2. $\int_{-1}^{+1} \int_{-2}^{+2} x^2 y^3\,dx\,dy.$

6-3. $\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$

6-4. $\int_1^2 \int_2^3 (x-1)^2 (y+1)^2\,dx\,dy.$

6-5. $\int_1^2 \int_2^3 \frac{dx\,dy}{xy}.$

6-6. $\int_1^2 \int_3^4 \frac{x^3}{y^4}\,dx\,dy.$

6-7. $\int_{-\infty}^{-1} \int_{-1}^{0} \frac{y^4}{x^2}\,dx\,dy.$

6-8. $\int_{0,1}^{0,2} \int_{0,1}^{0,3} \frac{x}{y}\,dx\,dy.$

6-9. $\int_1^2 \int_0^5 \frac{xy\,dx\,dy}{1+x^2}$

6-10. $\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx\,dy}{1+y^2}.$

6-11. $\int_1^2 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{\sqrt{xy}}.$

6-12. $\int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{sen} x \cos y\,dx\,dy.$

6-13. $\int_0^{\pi/4} \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg} x \cos y\,dx\,dy.$

6-14. $\int_0^{\pi} \int_0^{R} \theta\rho \cdot d\theta \cdot d\rho.$

6-15. $\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot d\rho \cdot d\theta}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}.$

6-16. $\int_0^1 \int_3^2 \frac{x}{y}\,dx\,dy.$

6-17. $\int_0^1 \int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta.$

6-18. $\int_0^1 \int_0^2 e^{2x} e^{y}\,dx\,dy.$

6-19. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2\theta\,dx\,d\theta.$

6-20. $\int_0^1 \int_{x^2}^{-x} x^2\,dy\,dx.$

6-21. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} y^2\,dx\,dy.$

6-22. $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} y^2\,dy\,dx.$

6-23. $\int_{-2}^{1}\int_{y^2+2y}^{1-y^2} dx\,dy.$

6-24. $\int_{0}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$

6-25. $\int_{0}^{3}\int_{0}^{2} xy\,dx\,dy.$

6-26. $\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dx\,dy.$

6-27. $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\int_{0}^{2a\cos\theta} r^3\,d\theta\,dr.$

6-28. $\int_{0}^{2a}\int_{0}^{y^2/4a} (x^2+y^2)\,dy\,dx.$

6-29. $\int_{0}^{2a}\int_{0}^{y^2/4a} x^2\,dy\,dx.$

6-30. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{a\,\mathrm{sen}\,2\theta} r^3\,d\theta\,dr.$

6-31. $\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{a\cos 2\theta} \frac{ar\,d\theta\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$

6-32. $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\int_{0}^{3\cos\theta} r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta\,dr.$

6-33. $\int_{0}^{\sqrt{\pi}}\int_{\pi/2}^{x^2} x\cos y\,dx\,dy.$

6-34. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{3\cos\theta} r^2\cos\theta\,d\theta\,dr$

6-35. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2a\cos\theta} r\,d\theta\,dr.$

6-36. Si se hace $R = a\sqrt{2\cos 2\theta}$, calcular:

$$\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{R} \rho^3\,d\rho\,d\theta.$$

6-37. Calcular: $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{a\sqrt{\mathrm{sen}\,\theta}} \rho^3\,d\rho\,d\theta.$

6-38. $\int_{1}^{2}\int_{1}^{3-x} \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}.$

6-39. $\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2} = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\pi/2} \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{(\rho^2+a^2)^2}$ (siendo $\rho^2 = x^2+y^2$).

6-40. Calcular $\iint \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) dx\,dy$

extendida a un rectángulo cuyos dos lados OA y OB están colocados sobre los ejes de coordenadas y son iguales respectivamente a a y b.

Calcular, para el dominio interior al círculo $x^2+y^2-2x=0$, las integrales dobles:

6-41. $\iint xy^2\,dx\,dy$

6-42. $\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$

6-43. Calcular, para la región del plano exterior a la parábola $y^2 = 2x$, la integral doble:

$$\iint \frac{dx\,dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

6-44. Calcular $\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, r\, dr\, d\theta$

siendo $p = \frac{y}{a}$ $q = \frac{x}{a}$ y $x^2 + y^2 = r^2$,

donde θ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{3}$ y r varía desde 0 hasta $a\sqrt{4\cos^2\theta - 1}$.

6-45. Calcular $\iint (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

donde x varía desde 1 hasta $\sqrt{4 - y^2}$ e y varía desde 1 hasta $\sqrt{3}$.

6-46. Calcular $\iint r^4 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

donde r varía desde 0 hasta $2\cos\theta$, y θ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

6-47. Calcular $\iint \cos x \cos y\, dx\, dy$

extendida a la superficie de un triángulo OAB, donde OA está sobre el eje de las x, OB sobre el eje de las y, siendo $OA = OB = \frac{\pi}{2}$

$\left(\text{tendremos: } x + y = \frac{\pi}{2}\right)$.

x varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2} - y$, después y variará desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

6-48. Calcular $\iint \operatorname{sen}\theta\, r^2\, d\theta\, dr$

donde r varía desde 0 hasta $a\cos\frac{\theta}{2}$, después θ varía desde 0 hasta π.

Cálculo de superficies por integrales dobles

Calcular la superficie limitada entre las dos curvas siguientes:

6-49. $\begin{cases} y = 1 - x \\ y = x^2 - x. \end{cases}$

6-50. $\begin{cases} y = x + 7 \\ y = -x^2 + 9. \end{cases}$

6-51. $\begin{cases} y^2 = -x + 5 \\ y^2 = 4x. \end{cases}$

6-52. $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = -x^2 + x. \end{cases}$

6-53. $\begin{cases} y = x^3 - 2x \\ 3y = x^3. \end{cases}$

6-54. $\begin{cases} 4y = x^3 \\ x = -y^2 + y + 4. \end{cases}$

6-55. Calcular la superficie del círculo $x^2 + y^2 = 25$ comprendida entre la recta $x = 0$ y la parábola $4y^2 = 9x$.

6-56. Igual problema para el círculo $x^2 + y^2 = 16$ y la recta $y = x + 2$.

6-57. Calcular la superficie comprendida entre el círculo $x^2 + y^2 = 4$, el eje de las x y la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, para x e y positivos.

6-58. Calcular la superficie limitada por las curvas :

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = -x^2 + 2.$$

6-59. Calcular la superficie limitada por los círculos:

$$\rho = \mathrm{R}\cos\theta \quad \text{y} \quad \rho = \mathrm{R}\operatorname{sen}\theta.$$

6-60. Calcular la superficie limitada por la hipérbola:

$$xy = 4 \quad \text{y la recta} \quad y = 5 - x.$$

6-61. Calcular la superficie exterior al círculo $\rho = \mathrm{R}$ e interior a la cardioide: $\rho = \mathrm{R}(1 + \cos\theta)$.

Calcular la superficie comprendida entre las curvas siguientes:

6-62. $3y^2 = 25x$ y $5x^2 = 9y$.

6-63. $y^2 = ax$ y $x^2 + y^2 = 2ax$ (en el primer cuadrante).

6-64. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ y $x + y = a$.

6-65. $y = \operatorname{sen} x$ $y = \cos x$ y $x = 0$.

6-66. $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ $2y = x$ y $x = 0$.

Cálculo de superficies por integrales dobles, para curvas en coordenadas polares.

Sean las tres curvas:

$$\text{A, línea recta:} \quad \rho = \frac{3}{4\cos\theta},$$

$$\text{B, parábola:} \quad \rho = \frac{1}{1 + \cos\theta},$$

$$\text{D, cardioide:} \quad \rho = 1 + \cos\theta,$$

y los círculos:

$$C_1 \ \rho = 1, \qquad C_2 \ \rho = \cos\theta, \qquad C_3 \ \rho = 2, \qquad C_4 \ \rho = 3/2.$$

Calcular las superficies limitadas por las curvas siguientes:

6-67. C_4 a la derecha de A.

6-68. C_2 a la derecha de A.

6-69. D exteriormente a C_1.

6-70. C_4 exteriormente a D.

6-71. C_1 exteriormente a B.

6-72. D a la derecha de A.

6-73. D exteriormente a B.

6-74. Calcular la parte de la superficie del círculo $\rho = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$, situada exteriormente al círculo $\rho = 1$.

Calcular por integrales dobles las superficies limitadas entre las dos curvas siguientes:

6-75. El círculo $\rho = a\cos\theta$ y el círculo $\rho = b\cos\theta$ siendo $b > a$.
(Integrar primero respecto a ρ.)

6-76. $\rho = 6\operatorname{sen}\theta$ y $\rho = 12\operatorname{sen}\theta$.

6-77. $4 = \rho\cos\theta$ y $\rho = 8$.

6-78. $\rho = a(1 + \cos\theta)$ y $\rho = 2a\cos\theta$.

Cálculo de los momentos de inercia por integrales dobles

6-79. Calcular el momento de inercia respecto al eje Oy, de la superficie limitada por la parábola $y^2 = 4x$, la recta $y = 2$ y el eje Oy.

6-80. Calcular el momento de inercia, respecto a un eje perpendicular al plano en el origen O, de la superficie comprendida entre la parábola $y^2 = 4x$ la recta $y = 2$ y el eje Oy.

6-81. Calcular el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al plano y que pasa por el origen O, de la superficie de un bucle de la curva:

$$\rho = r\operatorname{sen} 2\theta$$

(es una rosácea de 4 ramas, del tipo de un trébol de 4 hojas ovales; se tomará la del primer cuadrante, que tiene como eje de simetría una línea inclinada en 45°).

6-82. Calcular el momento de inercia respecto al eje Oy, de la superficie limitada por Oy y la parábola $y^2 = 1 - x$.

6-83. Calcular el momento de inercia respecto a Ox de la superficie limitada por las parábolas:

$$y^2 = 4x + 4 \qquad y^2 = -4x + 4.$$

6-84. Calcular el momento de inercia de la superficie de la cardioide $\rho = a\,(1 + \cos\theta)$ respecto a un eje perpendicular a su plano, en el polo.

Calcular por *integrales dobles*, los momentos de inercia polar, aplicando la fórmula:

$$I_0 = \int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

para las superficies limitadas por las curvas siguientes:

6-85. $x = a, \qquad y = 0, \qquad y = \dfrac{b}{a}x,$

6-86. El rectángulo limitado por las rectas $x = a$, $y = b$ y los dos ejes de coordenadas.

6-87. El triángulo formado por los dos ejes y la recta que une los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

6-88. La parábola $y^2 = 4x$, la recta $x + y = 3$ y el eje Ox.

Calcular por *integrales dobles* los momentos de inercia siguientes:

6-89. I_x e I_y para la superficie limitada por las curvas $y^2 = 4x$, $y = 0$ y $x = 1$.

6-90. I_y para la superficie comprendida entre $y = 4x$, $x + y = 0$ e $y = 0$.

6-91. Encontrar el momento de inercia de un rectángulo de lados $2a$ y $2b$ respecto a un eje que pasa por su centro paralelamente al lado $2a$.

Aplicación de las integrales dobles al cálculo de los centros de gravedad

Calcular la posición del centro de gravedad de las *líneas* formadas por las curvas siguientes:

6-92. $y = x^2$ (desde 0 hasta 2) respecto al eje de las x, y después respecto al eje de las y.

6-93. $y = \dfrac{1}{x}$ (desde $x = 1$ hasta $x = 10$), sucesivamente respecto a los dos ejes.

6-94. $y = e^{-x}$ (desde $x = 0$ hasta $x = 10$), respecto al eje Ox.

6-95. $y = \operatorname{sen} x$, durante 1/4 de período, respecto al eje Ox.

6-96. $y = \cos x$, durante 1/4 de período, respecto al eje Oy.

6-97. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ (desde $x = 0$ hasta $x = 2$), respecto al eje Ox.

6-98. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (desde $x = 0$ hasta $x = 1$), respecto al eje Ox.

6-99 hasta 6-105. Calcular la posición del centro de gravedad de las superficies comprendidas entre las curvas anteriores y el eje de las x, en los límites indicados más arriba. (Ver problemas **6-92** *hasta* **6-98**.)

Calcular la posición del centro de gravedad en los casos siguientes:

6-106. Volumen de un cono respecto a su base.

6-107. Superficie de un semicírculo respecto a su diámetro.

6-108. Superficie comprendida entre la curva $y = x^2 - 9x + 18$ y los ejes Ox y Oy.

6-109. Superficie comprendida entre las dos curvas $y^2 = 8x$ y $x^2 = 8y$.

6-110. Superficie comprendida entre la curva $y = x^2 + 5$ y la recta $y = 4x + 5$.

6-111. Superficie comprendida entre la curva $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ y el eje de las x.

6-112. Superficie comprendida entre los ejes de coordenadas y la parábola:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{1/2} = 1$$

(se hará $x = a \operatorname{sen}^4 \theta$ e $y = b \cos^4 \theta$).

6-113. Superficie comprendida entre las curvas $x^2 = 2y^3$ y $x^2 = 8y$.

6-114. Superficie comprendida (en el primer cuadrante entre la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la cuerda que pasa por los puntos $x = a$, $y = 0$ y $x = 0$, $y = b$.

6-115. Superficie de un segmento de círculo, delimitado en una circunferencia de radio R, la anchura de la base es a. Se calculará la posición del Centro de Gravedad, respecto al centro O de la circunferencia.

6-116. Superficie de un cuarto de elipse.

6-117. Superficie limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y el eje de las x.

6-118. Superficie comprendida entre la cicloide:
$x = a(\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$, $y = a(1 - \cos \varphi)$, y el eje de las x.

6-119. La línea de una catenaria $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ desde $x = 0$ hasta $x = a$.

6-120. Superficie de la curva $r = a \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$, cuando θ varía desde 0 hasta 2π.

6-121. Línea de una semicardioide $\rho = R(1 + \cos\theta)$.

6-122. Superficie limitada por la curva $y = \frac{\theta}{\sqrt{1 - x^2}}$, el eje de las x y la recta $x = a$. Caso particular $a = \frac{1}{2}$ y 1.

6-123. Superficie lateral de un tronco de cono de revolución.

Calcular *por integrales dobles*, la posición del centro de gravedad de las curvas siguientes:

6-124. Un cuadrante de círculo.

6-125. Un cuadrante de elipse.

6-126. Un cuadrante del as de diamantes (astroide): $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

6-127. $y = \operatorname{sen} x$ (desde 0 hasta π).

6-128. $y^2 = 4ax, \quad x = h.$

6-129. $y = 2x, \quad y = 0, \quad x = 0.$

6-130. $y^2(1 - x^2) = 1, \quad x = 0.$

6-131. La cicloide $x = a(\varphi - \operatorname{sen}\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi).$

6-132. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}, \quad x = 0 \quad$ e $\quad y = 0.$

6-133. Un bucle de $\rho = a \cdot \operatorname{sen} 2\theta$.

6-134. $y = \sqrt{x}, \quad$ desde $x = 0 \quad$ hasta $x = 2.$

6-135. $y = \sqrt[3]{x}, \quad$ desde $x = 0 \quad$ hasta $x = 2.$

6-136. $y = x^2, \quad$ los mismos límites.

6-137. $y = x^3, \quad$ los mismos límites.

6-138. $y = \frac{1}{x}, \quad$ desde $x = 1 \quad$ hasta $x = 2.$

6-139. $y = e^x, \quad$ desde $x = 0 \quad$ hasta $x = 2.$

6-140. $y = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad$ desde $x = 0 \quad$ hasta $x = 2.$

6-141. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la superficie limitada por la curva $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, el eje de las x, y la recta $x = t$ cuando t está comprendido entre 0 y 1. Caso particular para $t = 1/2$ y $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ¿Cuáles serían las fórmulas cuando t tendiera hacia 1?

6-142. Calcular por *triple integración* el centro de gravedad de 1/8 de esfera.

6-143. Calcular la posición del centro de gravedad de un sólido que tiene la forma de una semiesfera.

6-144. Calcular la posición del centro de gravedad de un sólido semiesférico, cuando la densidad es proporcional a la distancia a la base.

2.º Integrales triples

Calcular:

6-145. $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 x\,dx\,dy\,dz.$

6-146. $\int_1^2 \int_2^3 \int_3^4 (x^2 - 1)\,dx\,dy\,dz.$

6-147. $\int_{-1}^{+1} \int_{-2}^{+2} \int_{-3}^{+3} y^2 z\,dx\,dy\,dz.$

6-148. $\int_1^{\infty} \int_{-2}^{+2} \int_0^1 \frac{y^2 z}{x}\,dx\,dy\,dz.$

6-149. $\int_{-1}^{+1} \int_{-2}^{+2} \int_{-3}^{+3} xyz\,dx\,dy\,dz.$

6-150. $\int_0^1 \int_0^2 \int_{-1}^3 \frac{x^3 y^2}{z}\,dx\,dy\,dz.$

6-151. $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{0,1}^{0,2} (x^2 + 1)(y - 1)z^2\,dx\,dy\,dz.$

6-152. $\int_1^2 \int_2^3 \int_{10}^{11} \frac{dx\,dy\,dz}{xyz}.$

Calcular las integrales triples siguientes:

6-153. $\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r^5\,d\theta\,dr\,dx.$

6-154. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a r^3 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi\,dr.$

6-155. $\int_0^1 \int_0^{\operatorname{Log} x} \int_0^{x+y} e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz.$

6-156. $\int_0^1 \int_0^{\pi/3} \int_0^{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} r^3 \cdot dr\,d\theta\,dz.$

6-157. $\int_0^{\pi/4} \int_1^{\cos\theta} \int_0^{r} \frac{d\theta\, dr\, dz}{r^2 z^2}$.

6-158. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a\cos\theta} r \operatorname{sen}^3 \varphi\, d\varphi\, d\theta\, dr$.

6-159. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\vartheta} \int_{a \operatorname{sen}\varphi}^{a} r \operatorname{sen}^2 \varphi \cos\varphi \cos\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$.

6-160. $\int_0^{R} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} 6\rho^5 \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$.

6-161. Calcular $\iiint \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot d\varphi$

donde ρ varía desde 0 hasta $2R\cos\theta$, θ varía desde 0 hasta $\pi/2$ y φ desde 0 hasta 2π.

6-162. Calcular $\iiint 6\rho^5 \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$

donde ρ varía desde 0 hasta R, θ y φ varían desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

6-163. Calcular $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} \int_0^{2-y-x} dz\, dy\, dx$.

6-164. $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x\, dz\, dx\, dy$.

6-165. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y^2} z\, dz\, dy\, dx$.

Sumario del Tomo V: Ecuaciones Diferenciales.

Ecuaciones de primer orden. Tipos diversos.

17 ejemplos de aplicaciones prácticas de ecuaciones de primer orden.

Ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes.

24 ejemplos detallados de aplicación práctica de las ecuaciones de segundo orden a Problemas de Física, Mecánica, Electricidad, Acústica, Radio y Resistencia de Materiales.

Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones en derivadas parciales (aplicación a las cuerdas vibrantes y a la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de las líneas).

El potencial *newtoniano*.

Introducción matemática al estudio de los campos.

OBRAS DEL MISMO AUTOR PUBLICADAS POR

PARANINFO

CURSO ELEMENTAL DE MATEMATICAS SUPERIORES

TOMO I

Complementos de álgebra. Las derivadas y sus aplicaciones, con 400 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO II

Desarrollos en serie. Cálculo de complejos. Cálculo diferencial, con 700 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO III

Cálculo integral y primeras aplicaciones, con 450 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO IV

Continuación del cálculo integral y aplicaciones, con 290 ejercicios y problemas a resolver.

Cálculo integral, complementos y aplicaciones.
Cálculo de los momentos de inercia.
Algunas aplicaciones de las integrales.
La serie de *Fourier*, con *ejemplos detallados* de desarrollos.
Integración gráfica y cálculo aproximado de una integral.
Integrales curvilíneas.
Integrales curvilíneas.
Integración de diferenciales totales.
Integrales múltiples. Integrales dobles. Nociones sobre integrales triples.

TOMO V

Ecuaciones diferenciales y aplicaciones, con 300 ejercicios y problemas a resolver.

Ecuaciones de primer y segundo orden, tipos diversos, con numerosos ejemplos.
48 ejemplos de aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales a problemas (mecánica, física, electricidad, termodinámica, resistencia de materiales, etc.).
Ecuaciones en derivadas parciales (aplicación a las cuerdas vibrantes y a la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de las líneas).
Introducción al estudio del potencial, y al estudio de los campos.

TOMO VI, con 782 ejercicios y problemas a resolver.

Geometría analítica plana.
Estudio de las cónicas y aplicaciones.
Trazado de curvas con numerosos ejemplos detallados.
Algunas aplicaciones físicas de las cónicas.

TEORIA Y PRACTICA DE LOS CIRCUITOS ELECTRONICOS Y DE LOS AMPLIFICADORES

TOMO I

Teoría y aplicaciones del cálculo de complejos al estudio de los circuitos de electrónica.

TOMO II

Los amplificadores HF y BF. Los osciladores y la modulación. Los filtros y los puentes de medida.

TOMO III

Estudio general de la propagación de la corriente HF a lo largo de las líneas y aplicaciones. Antenas. — Ecuaciones de Maxwell y aplicaciones.

Magallanes, 25
MADRID-15